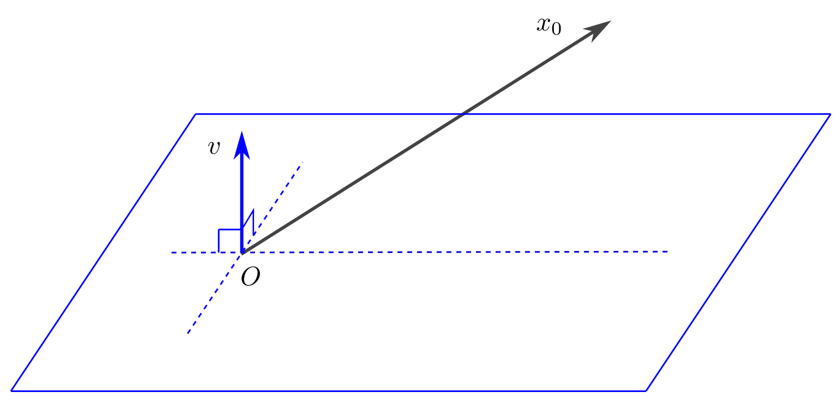
ASE2030 Linear Algebra and Statistics: Midterm exam (3 problems)

시험 시작 전, 다음의 '학생 명예선서(Honor Code)'를 답지 맨 위에 적고 서명하시오.
"나는 정직하게 시험에 응할 것을 서약합니다."
"By signing this pledge, I promise to adhere to exam requirements and maintain the highest level of ethical principles during the exam period."

1) *Operations around a plane (12 points).* 다음 그림과 같이 원점을 지나는 n차원 공간 상의 한 평면은, 그 평면과 수직하며 크기가 1인 normal vector v로 ($\|v\| = 1$) 표현할 수 있다. 참고로 해당 평면 위에 있지 않은 한 벡터 x_0를 그림에 함께 표시하였다.



이와 같은 벡터 v에 대해 다음의 두 행렬을 정의하자.

$$P = I - vv^T$$
$$R = I - 2vv^T$$

a) 행렬 P에 의한 연산 Px_0는 벡터 x_0를 어디로 이동시키는지, 위의 그림에 덧붙여 명확하게 설명하시오 (3pts).

b) 행렬 P로 정의되는 linear dynamical system, $x_{t+1} = Px_t$에 대해 초기치 x_0가 위의 그림과 같이 주어졌을 때, 이후의 trajectory인 $x_1, x_2, x_3, \ldots$는 어디를 지나는가? 즉, x_k는 (k는 자연수) 무엇인가 (3pts)?

c) 행렬 R에 의한 연산 Rx_0는 벡터 x_0를 어디로 이동시키는지, 위의 그림에 덧붙여 명확하게 설명하시오 (3pts).

d) 행렬 R로 정의되는 linear dynamical system, $x_{t+1} = Rx_t$에 대해, 초기치 x_0가 위의 그림과 같이 주어졌을 때, 이후의 trajectory인 $x_1, x_2, x_3, \ldots$는 어디를 지나는가? 즉, x_k는 (k는 자연수) 무엇인가 (3pts)?

2) *PQ factorization (10 points).* Linearly independent한 row들로 구성된 행렬 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$를 생각하자. 행렬 A의 row들을 $a_1^T, \ldots, a_m^T$로 표현한다.

$$A = \begin{bmatrix} a_1^T \\ \vdots \\ a_m^T \end{bmatrix}$$

이와 같은 행렬 A는 항상 다음과 같이 $A = PQ$로 분해될 수 있는데, 여기서 P는 정사각형 lower triangular 행렬이며, Q는 orthonormal한 row들로 구성되어 있다.

$$A = PQ = \begin{bmatrix} p_1^T \\ \vdots \\ p_m^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1^T \\ \vdots \\ q_m^T \end{bmatrix}$$

a) 행렬 Q의 생김새와 특징 등에 대해 설명하시오 (2pts).

b) 행렬 P와 Q의 원소들을 어떻게 계산 수 있는지, (수업을 제대로 들은) 여러분의 동료들이 그 수치들을 계산해낼 수 있을 정도로 구체적으로 설명하시오 (4 pts).

c) A의 모든 row들을 합한 벡터와 P의 모든 row들을 합한 벡터는, 차원은 서로 다르지만 길이는 같음을 보이시오. 즉, 다음을 보이시오 (4 pts).

$$\|a_1 + a_2 + \cdots + a_m\| = \|p_1 + p_2 + \cdots + p_m\|$$

3) *Orthogonality of sets (8 points).* 같은 차원의 벡터들로 구성된 두 집합 $\mathcal{X}$와 $\mathcal{Y}$에 대해, 각각의 집합에서 임의의 원소들을 꺼냈을 때 그 둘이 항상 수직이면, 두 집합이 수직이라고 말하며 다음과 같이 표현한다.

$$\mathcal{X} \perp \mathcal{Y}$$

즉, 임의의 $x \in \mathcal{X}$와 임의의 $y \in \mathcal{Y}$에 대해 $x \perp y$이면 ($x^T y = 0$이면) $\mathcal{X} \perp \mathcal{Y}$이다.

이제, linearly dependent한 column들로 구성된 행렬 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$와 그에 따라 정의되는 다음의 두 집합, range와 nullspace를 생각하자.

$$\begin{aligned} \text{range}(A) &= \{Ax \mid x \in \mathbb{R}^n\} \\ \text{null}(A) &= \{x \mid Ax = 0\} \end{aligned}$$

a) A의 nullspace는 무한히 많은 원소를 가지고 있음을 설명하시오 (3 pts).

b) A^T의 range와 A의 nullspace가 수직임을 보이시오. 즉, 다음을 보이시오 (5 pts).

$$\text{range}(A^T) \perp \text{null}(A)$$