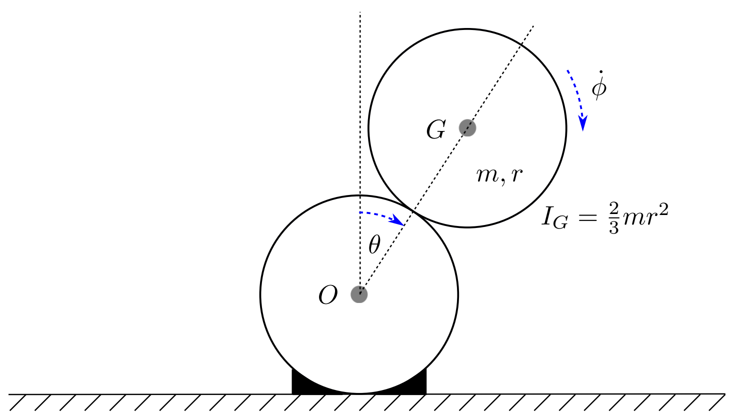
ASE2020 Dynamics: Final exam (2 problems)

시험 시작 전, 다음의 '학생 명예선서(Honor Code)'를 답지 맨 위에 적고 서명하시오.
"나는 정직하게 시험에 응할 것을 서약합니다."
"By signing this pledge, I promise to adhere to exam requirements and maintain the highest level of ethical principles during the exam period."

1) *A ball rolling on a ball (20 points).* 동일한 공 두 개가 아래 그림과 같이 수직면 상에 놓여있다. 공 하나는 바닥에 접착제로 단단히 고정되어 있으며, 또 하나는 꼭대기에 가만히 올려져 있다가 중력가속도 g에 의해 천천히 오른쪽으로 굴러내려가기 시작했다. 두 공의 접촉점 위치를 수직으로부터의 각도 θ로 표현하고, 구르는 공의 각속도를 $\dot{\phi}$이라 하자. 공의 질량과 반경은 각각 m, r이며, 공의 관성모멘트는 $I_G = \frac{2}{3}mr^2$이다.

두 공 사이의 정지마찰계수를 μ라 하면 ($\mu > 0$), 공은 처음에 미끄러지지 않고 굴러내려가다가 어느 순간 미끄러지면서 구를 것이다. 우선은, 미끄러지지 않고 굴러내려가는 초반의 상황을 생각하자.



a) 접촉점 방향의 변화율 $\dot{\theta}$과 구르는 공의 회전각속도 $\dot{\phi}$의 관계를 구하시오. 힌트: 구르는 공의 속도 v_G를 $\dot{\theta}$과 $\dot{\phi}$을 각각 사용하여 표현해보면 알 수 있음 (5pts.).

Solution. 고정된 공의 중심 O는 고정되어 있으며, 두 공의 접촉점 C는 순간회전중심이므로, $v_O = v_C = 0$임을 알 수 있다.구르는 공의 속도 v_G를 O에 대하여 표현하면 아래와 같고,

$$v_G = v_O + v_{G/O} = 2r\dot{\theta}$$

두 공의 접촉점 C에 대해 표현하면 다음과 같다.

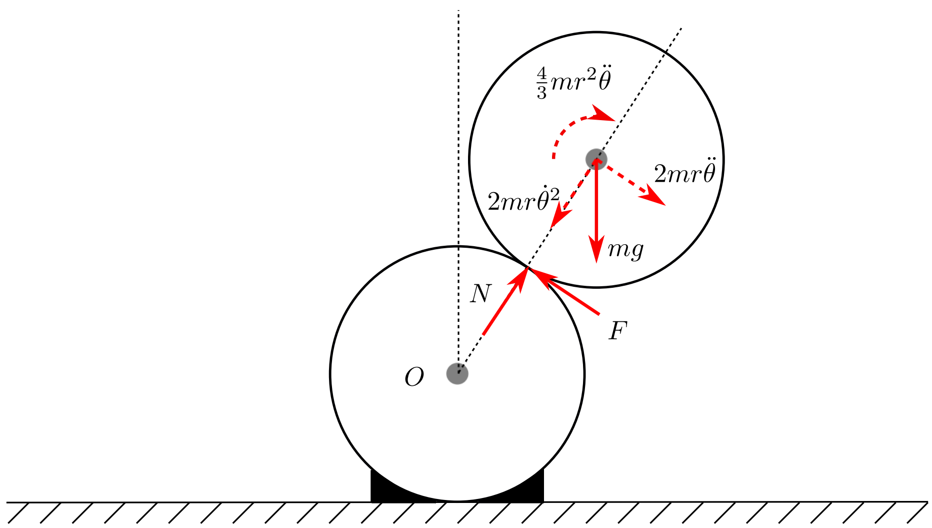
$$v_G = v_C + v_{G/C} = r\dot{\phi}$$

그러므로, $\dot{\phi} = 2\dot{\theta}$의 관계를 갖는다. 참고로, θ가 90도 돌았을 때 ϕ가 얼마나 돌게 되는지 생각해보면 간단히 알 수도 있다.

b) 구르는 공에 작용하는 힘과 가속도, 각가속도가 모두 표현되도록 free-body diagram과 kinetic diagram을 그리시오 (5pts.).

Solution. 위의 결과를 미분하면, $\ddot{\phi} = 2\ddot{\theta}$임을 알 수 있다. 그러면,

- 외력: 중력 mg가 G에 작용, 수직항력 N과 마찰력 F가 접촉점 C에 작용
- 중심 G에 대한 각운동량 변화율: $I_G\ddot{\phi} = \frac{4}{3}mr^2\ddot{\theta}$
- 중심 G의 normal 방향 운동량 변화율: $ma_n = 2mr\dot{\theta}^2$
- 중심 G의 tangential 방향 운동량 변화율: $ma_t = 2mr\ddot{\theta}$



c) 접촉점의 위치 변화를 설명할 수 있는 θ의 운동방정식을 구하시오. 즉, $\ddot{\theta}$과 $\dot{\theta}$을 θ의 함수로 각각 표현하시오 (5pts.).

Solution. 힘과 모멘트 관계를 이용하여 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} \frac{4}{3}mr^2\ddot{\theta} &= Fr \\ 2mr\dot{\theta}^2 &= mg\cos\theta - N \\ 2mr\ddot{\theta} &= mg\sin\theta - F \end{aligned}$$

여기서, 첫번째와 세번째 식에서 F를 소거하면 아래와 같고,

$$\frac{4}{3}mr^2\ddot{\theta} = mgr\sin\theta - 2mr^2\ddot{\theta} \quad \Longrightarrow \quad \ddot{\theta} = \frac{3g\sin\theta}{10r}$$

이를 $\ddot{\theta}d\theta = \dot{\theta}d\dot{\theta}$ 관계를 이용하여 적분하면,

$$\int_0^\theta \frac{3g\sin\theta}{10r}d\theta = \int_0^{\dot{\theta}} \dot{\theta}d\dot{\theta} \quad \Longrightarrow \quad \dot{\theta} = \sqrt{\frac{3g(1-\cos\theta)}{5r}}$$

d) 공은 언제부터 미끄러지기 시작할까? 미끄러지기 시작하는 위치 θ_{slip}을 직접 계산할 필요는 없으며, θ_{slip}을 계산할 수 있는 관계식을 제시하거나 그래프를 통해 설명하면 됨 (5pts.).

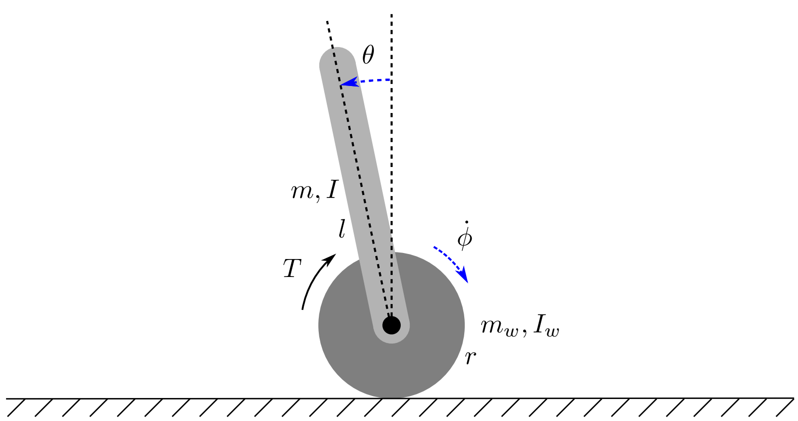
Solution. 위의 결과에서 N과 F를 아래와 같이 θ의 함수로 표현할 수 있다.

$$
\begin{aligned}
N &= mg\cos\theta - 2mr\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta - 2mr\frac{3g(1-\cos\theta)}{5r} \\
&= \frac{mg(11\cos\theta - 6)}{5} \\
F &= \frac{4}{3}mr\ddot{\theta} = \frac{4}{3}mr\frac{3g\sin\theta}{10r} \\
&= \frac{2mg\sin\theta}{5}
\end{aligned}
$$

공은 $|F| \geq |\mu N|$ 일 때 미끄러지므로, 아래 조건을 만족하는 θ_{slip}에서 공은 미끄러지기 시작한다.

$$2\sin\theta_{\text{slip}} = \mu(11\cos\theta_{\text{slip}} - 6)$$

2) *Segway (20 points).* 막대와 휠로 이루어진 세그웨이의 동역학을 분석하고자 한다. 막대는 세그웨이 플랫폼과 탑승자를 모델링하며, 막대와 휠 사이는 제어토크 T를 발생시킬 수 있는 모터로 연결되어 있는데, 모터는 적절한 T를 통해 휠을 회전시키며 막대의 균형을 유지시키는 역할을 한다. 제어 모터에 적절한 신호가 공급되면, 그림에 표현된 것과 같이 휠에는 시계방향의 토크($+T$)가 작용하고, 동시에 막대에는 반력에 의한 반시계방향 토크($-T$)가 작용한다. 휠과 바닥 사이의 정지마찰계수는 충분히 커서, 휠은 미끄러지지 않고 구르기만 하는 운동을 한다고 가정한다.

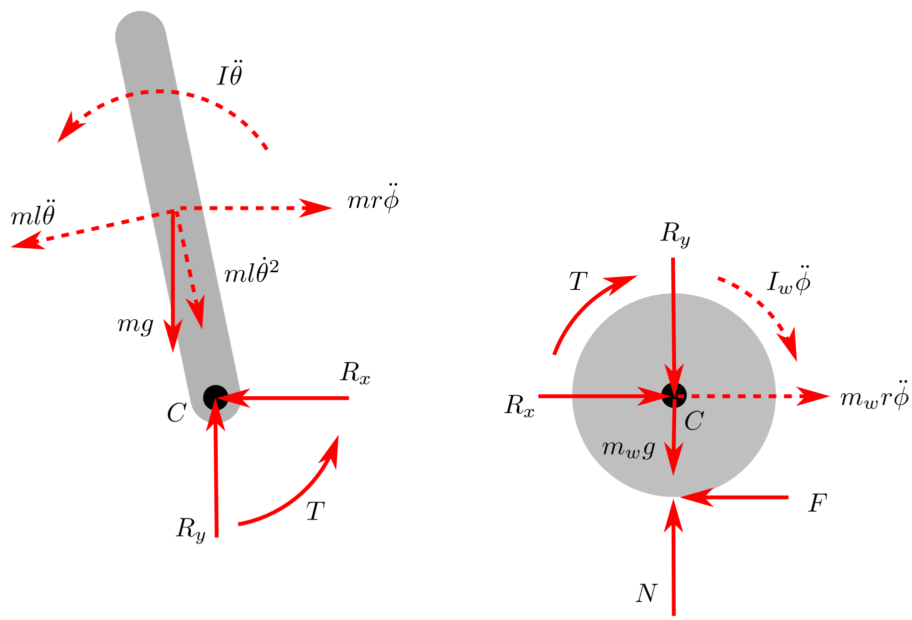


- 막대의 질량: m
- 막대의 길이: $2l$ (무게중심은 한 가운데에 위치)
- 막대의 무게중심에 대한 관성모멘트: I
- 막대의 수직으로부터의 회전각: θ
- 휠의 질량과 반경: m_w, r
- 휠의 무게중심에 대한 관성모멘트: I_w
- 휠의 회전각속도: $\dot{\phi}$
- 중력가속도: g

a) 막대에 작용하는 모든 힘/토크와 가속도/각가속도가 표현되도록 free-body diagram과 kinetic diagram을 그리시오 (5pts.).

b) 휠에 작용하는 모든 힘/토크와 가속도/각가속도가 표현되도록 free-body diagram과 kinetic diagram을 그리시오 (5pts.).

Solution. 두 물체의 free-body diagram과 kinetic diagram은 다음과 같다.



c) 막대의 회전각 θ와 휠의 회전각 ϕ에 관한 운동방정식을 다음의 형태로 표현하시오. 즉, $\bar{M}$을 문제에 주어진 변수와 상수들을 사용하여 표현하시오 (5pts.).

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \bar{M}_{11} & \bar{M}_{12} \\ \bar{M}_{21} & \bar{M}_{22} \end{bmatrix}}_{\bar{M}} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T + mgl\sin\theta \\ T - mrl\dot{\theta}^2\sin\theta \end{bmatrix}$$

Solution. 막대에서, 회전축 C에 대한 모멘트 관계를 정리하면:

$$I\ddot{\theta} + ml^2\ddot{\theta} - mrl\ddot{\phi}\cos\theta = T + mgl\sin\theta$$

휠에서, 지면과의 접촉점에 대한 모멘트 관계를 정리하면:

$$I_w\ddot{\phi} + m_w r^2\ddot{\phi} = T + R_x r$$

막대에서, 수평방향 힘 관계를 정리하면:

$$R_x = ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta - mr\ddot{\phi}$$

마지막 두 식에서 R_x를 소거하면:

$$I_w\ddot{\phi} + m_w r^2\ddot{\phi} = T + mrl\ddot{\theta}\cos\theta - mrl\dot{\theta}^2\sin\theta - mr^2\ddot{\phi}$$

첫 번째 식과 마지막 식을 정리하면:

$$(I+ml^2)\ddot{\theta} - mrl\ddot{\phi}\cos\theta = T + mgl\sin\theta$$
$$-mrl\ddot{\theta}\cos\theta + \left(I_w + (m+m_w)r^2\right)\ddot{\phi} = T - mrl\dot{\theta}^2\sin\theta$$

행렬 표현으로 다시 쓰면:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} I+ml^2 & -mrl\cos\theta \\ -mrl\cos\theta & I_w+(m+m_w)r^2 \end{bmatrix}}_{\bar{M}} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T+mgl\sin\theta \\ T-mrl\dot{\theta}^2\sin\theta \end{bmatrix}$$

d) 막대의 회전각 θ와 각속도 $\dot{\theta}$이 매우 작다고 가정하고, 위에서 얻은 운동방정식을 아래의 형태로 선형화(linearize)하시오. 즉, M과 K를 문제에 주어진 상수들만을 사용하여 표현하시오 (5pts.).

$$\underbrace{\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}}_{M} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}}_{K} \begin{bmatrix} \theta \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} T$$

Solution. 막대의 회전각 θ와 각속도 $\dot{\theta}$이 매우 작다고 가정하면 $\dot{\theta}^2 \approx 0$, $\sin\theta \approx \theta$, $\cos\theta \approx 1$로 선형화할 수 있다. 이를 사용하여 위 결과를 정리하면:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} I+ml^2 & -mrl \\ -mrl & I_w+(m+m_w)r^2 \end{bmatrix}}_{M} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T+mgl\theta \\ T \end{bmatrix}$$

다시 정리하면:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} I+ml^2 & -mrl \\ -mrl & I_w+(m+m_w)r^2 \end{bmatrix}}_{M} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} -mgl & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{K} \begin{bmatrix} \theta \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} T$$