ASE2030 Linear Algebra and Statistics: Final exam (2 problems)

시험 시작 전, 다음의 '학생 명예선서(Honor Code)'를 답지 맨 위에 적고 서명하시오. "나는 정직하게 시험에 응할 것을 서약합니다." "By signing this pledge, I promise to adhere to exam requirements and maintain the highest level of ethical principles during the exam period."

1) *Sensor signal processing (20 points).* 다음과 같이 노이즈가 섞여 들어오는 m개의 순차적인 신호 계측 상황을 생각하자. 신호 $y_i \in \mathbb{R}$는 i번째의 계측 신호를 의미하며, $y_1, \dots, y_m$은 각각 Δt의 동일한 시간 간격을 가지고 계측된다. 즉, y_i는 시간 $t_i = i\Delta t$에 계측된다.

$$y_i = a_i^T x + v_i \qquad \text{for } i = 1, \dots, m$$

여기에서 $x \in \mathbb{R}^n$는 계측을 통해 알아내고자 하는 원 신호이며, a_i는 i번째 신호가 계측되는 순간의 계측 기하를 통해 결정되는 민감도 벡터로, 알고 있다고 가정한다. 또한, $m > n$이며 아래의 $n \times m$ 민감도 행렬 A의 row들은 linearly independent하다고 가정한다.

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_m \end{bmatrix}$$

계측 노이즈가 없는 이상적인 상황에서는 $y_i = a_i^T x$가 계측되어야 하지만, 실제로는 계측 신호 오차 $v_i \in \mathbb{R}$가 포함되어 계측되며, 이 문제에서는 노이즈 섞인 계측 신호가 주어진 상황에서 원 신호를 복원해 내는 문제를 고려한다.

센서의 계측 노이즈 v_i는 랜덤한 Gaussian 분포를 갖는다고 단순하게 모델링할 수도 있겠지만, 일반적으로 bias 성분과 drift 성분을 포함하여 다음과 같이 보다 구체적으로 모델링할 수 있다.

$$\begin{aligned} v_i &= \alpha + \beta(t_i - t_0) + w_i \\ &= \alpha + \beta i \Delta t + w_i \end{aligned}$$

여기에서 $\alpha \in \mathbb{R}$는 bias 오차로, 원 신호에 관계없이 일정하게 더해지는 오차를 의미하며, $\beta(t_i - t_0)$는 drift 오차로, 시간에 따라 선형적으로 증가하는 오차를 의미한다. Drift 오차의 시간당 증가율인 $\beta \in \mathbb{R}$를 drift rate이라고 부른다. 마지막으로 더해지는 $w_i \in \mathbb{R}$는 예측 불가능한 랜덤한 노이즈 성분이다.

이제, 계측 신호 $y_1, \dots, y_m$과 그에 따르는 민감도 벡터 $a_1, \dots, a_m$이 주어져 있을 때, 원 신호(x)와 센서 오차 모델(α와 β)을 동시에 추정하기 위한 방법을 설명하시오. 문제에 기술된 가정 외에, 추가적인 가정이 필요하다면 함께 자세히 설명하시오.

Solution. 문제는 모든 계측신호 y_i를 가장 잘 설명할 수 있는 원 신호 x와 모델 α, β를 찾는 문제로 볼 수 있다. 즉, 아래와 같은 계측 신호 모델 $\hat{y}_i$에 대해

$$\hat{y}_i = a_i^T x + \alpha + \beta i T$$

계측 신호 모델이 실제 계측치들과 잘 일치하도록 $\sum_{i=1}^m (y_i - \hat{y}_i)^2$를 최소화하는 x, α, β를 찾음으로써 문제는 해결된다. 이 문제는 아래와 같은 행렬 표현식

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}}_{y} \approx \underbrace{\begin{bmatrix} a_1^T & 1 & T \\ a_2^T & 1 & 2T \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_m^T & 1 & mT \end{bmatrix}}_{\tilde{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix}}_{\tilde{x}}.$$

에서, $\|y - \tilde{A}\tilde{x}\|^2$를 최소화하는 $\tilde{x}$를 찾는 문제와 동일하다. 최적의 $\tilde{x}$는 아래와 같이 계산되며,

$$\tilde{x}_{\mathrm{ls}} = \begin{bmatrix} x_{\mathrm{ls}} \\ \alpha_{\mathrm{ls}} \\ \beta_{\mathrm{ls}} \end{bmatrix} = (\tilde{A}^T\tilde{A})^{-1}\tilde{A}^T y$$

이와 같은 방법이 정상적으로 동작하려면 $m \geq n+2$이며 $\tilde{A}$의 컬럼들이 linearly independent해야 한다.

참고로, $\tilde{A}$의 컬럼들이 linearly independent하다는 얘기는, 이상적인 센서 신호가 bias처럼 거동하거나 drift처럼 거동하지 않음을 의미한다. 다시 말해서, 센서 신호가 bias나 drift처럼 흐른다면 원 신호에서 bias와 drift를 구분해 내지 못한다는 것과 같은 이치로 설명될 수 있다.

2) *Game show (20 points).* 세 개의 문 중에 하나를 선택하여 문 뒤에 있는 선물을 가질 수 있는 예능 프로그램에 어떤 사람이 참가했다. 게임 규칙은 다음과 같다.

- 세 개의 닫힌 문 중, 하나의 문 뒤에는 치킨이 있고, 나머지 두 개의 문 뒤에는 교수님의 사진이 있다. 진행자는 어떤 문 뒤에 치킨이 있는지 사전에 알고 있다.
- 참가자는 처음에 셋 중 하나의 문을 마음대로 선택할 수 있다.
- 참가자가 문을 선택하고 나면, 진행자는 나머지 두 문 중에서 교수의 사진이 있는 문을 열어서 보여준 후, 참가자에게 최초의 선택을 유지할지, 아니면 열리지 않은 나머지 문으로 옮길지 물어보고, 선택을 바꿀 수 있는 기회를 준다.
- 이 때, 참가자는 선택을 유지할 수도, 나머지 문으로 선택을 옮길 수도 있으며, 최종 선택을 결정한 후, 선택한 문을 열어 뒤에 있는 상품을 가져간다.

참가자가 치킨을 가지려할 때, 마지막 단계에서 선택을 바꾸는 것이 유리할까, 아니면 바꾸지 않고 원래 선택했던 번호를 유지하는 것이 좋을까? 이 문제에서는 이 내용을 살펴보기로 한다.

세 문을 1,2,3이라 하고, 실제 치킨이 놓여 있는 문을 X, 진행자가 연 문을 Y라 하자. 치킨은 처음에 랜덤하게 놓였으므로 참가자의 첫 선택 직후 치킨을 얻을 확률은 1/3임을 알 수 있다. 즉, $P(X=1) = P(X=2) = P(X=3) = 1/3$이다. 문제를 단순화하기 위하여, 일반성을 잃지 않고, 다음과 같이 가정하자.

- 참가자가 선택한 문을 1이라고 부르자.

진행자는 나머지 둘 중 교수의 사진이 있는 문을 연다. 만약 진행자가 2번 문을 열었다면, 참가자는 다음의 두 조건부 확률을 계산해 보고 선택 변경 여부를 결정할 수 있다.

$$P(X = 1 \mid Y = 2)$$
$$P(X = 3 \mid Y = 2)$$

즉, $P(X = 1 \mid Y = 2) > P(X = 3 \mid Y = 2)$이라면 애초의 선택을 바꾸지 않고 1에 머무르는 것이 유리할 것이며, 반대의 경우에는 선택을 바꾸는 편이 유리하다. 두 조건부 확률이 같다면 선택의 유지/변경은 무의미하다. 진행자가 3번 문을 연 경우도 마찬가지 방법으로 분석하여 선택 전략을 수립할 수 있다.

여러분이 참가자라면 이 상황에서 어떻게 분석하고 선택할 것인지 설명하시오.

Solution. 참가자가 1번 문을 골랐고, 진행자가 2번 문을 열었을 때, 선택 변경의 기준이 되는 조건부 확률은 Bayes' rule에 의해 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$P(X = j \mid Y = 2) = \frac{P(Y = 2 \mid X = j)P(X = j)}{\sum_{i=1}^{3} P(Y = 2 \mid X = i)P(X = i)}$$

그런데,

- 치킨이 1번 문 뒤에 있었다면 ,진행자는 2번 또는 3번 문을 무작위로 열 수 있으므로, $P(Y=2 \mid X=1)=\frac{1}{2}$이 되며,
- 치킨이 2번 문 뒤에 있었다면, 진행자는 3번 문을 열어야만 하므로, $P(Y=2 \mid X=2)=0$이고,
- 치킨이 3번 문 뒤에 있었다면, 진행자는 2번 문을 열어야만 하므로 $P(Y=2 \mid X=3)=1$이 된다.

게다가 $P(X=1)=P(X=2)=P(X=3)=\frac{1}{3}$이므로, 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$
\begin{aligned}
P(X=1 \mid Y=2) &= \frac{P(Y=2 \mid X=1)P(X=1)}{\sum_{i=1}^{3} P(Y=2 \mid X=i)P(X=i)} = \frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+0\times\frac{1}{3}+1\times\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \\
P(X=3 \mid Y=2) &= \frac{P(Y=2 \mid X=3)P(X=3)}{\sum_{i=1}^{3} P(Y=2 \mid X=i)P(X=i)} = \frac{1\times\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+0\times\frac{1}{3}+1\times\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

그러므로 선택을 바꾸는 것이 유리하다.