ASE2010 Applied Linear Algebra: Midterm exam (5 problems, 90 minutes)

시험 시작 전, 다음의 '학생 명예선서(Honor Code)'를 답지 맨 위에 적고 서명하시오.
"나는 정직하게 시험에 응할 것을 서약합니다."
"By signing this pledge, I promise to adhere to exam requirements and maintain the highest level of ethical principles during the exam period."

- 아래의 문제/소문제들 각각에 대해, 핵심 내용만을 간결하게 포함하여 3줄 이내로 답하시오 (3줄을 초과하는 답은 안읽을거임). 마지막 문제는 10줄까지 작성 가능.

1) *Friend matrix (5 points).* 이번학기 응용선형대수 수강생은 모두 64명이다. 수강생 전체의 친구 관계를 조사하여 다음과 같이 64×64의 '친구행렬' F를 만들자.

$$F_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{수강생 } i\text{와 수강생 } j\text{가 친구인 경우.} \\ 0, & \text{수강생 } i\text{와 수강생 } j\text{가 친구가 아닌 경우.} \end{cases}$$

친구 관계는 서로 대칭으로 $F_{ij} = F_{ji}$가 항상 성립한다. 즉, i가 j를 친구라고 생각한다면 j도 i를 친구라고 생각한다. 그리고 자기 자신을 자기의 친구라고 생각하는 사람은 없기 때문에 $F_{ii} = 0$이라고 하자. 마지막으로, 우리 수업을 듣는 수강생들은 우리 수업 외부에는 친구가 전혀 없다고 가정하자!

아래의 벡터와 행렬 두 가지를, 친구행렬 F와 우리 수업 수강생들이 알아들을 수 있는 일반적인 표현들(transpose, unit vector, one vector, zero vector, identity matrix, inverse matrix 등등)을 사용하여 최대한 간략히 나타내시오.

a) 인싸지수 벡터 $t \in \mathbb{R}^{64}$ (즉, t_i는 수강생 i의 친구의 숫자).

b) 공통친구관계 행렬 $C \in \mathbb{R}^{64\times 64}$ (즉, C_{ij}는 수강생 i와 j가 공통으로 가진 친구들의 숫자이며 C_{ii}는 수강생 i의 친구의 숫자).

2) *Two trajectories (5 points).* 선형동역학 $x_{t+1} = Ax_t$를 따르는 n차원 벡터들의 궤적 $x_1, \ldots, x_N$이 있고, 더불어 동일한 선형동역학을 따르는 또 다른 n차원 벡터들의 궤적 $z_1, \ldots, z_N$이 있다고 가정하자. 즉, $t = 1, \ldots, N-1$에 대해 $z_{t+1} = Az_t$을 만족한다고 가정한다. 이 때 다음의 두 명제가 항상 참인지 여부를 판별하시오. 참/거짓 여부를 말하고, 이유를 간단히 설명하시오.

a) 만약 $x_1 = z_1$이라면 $x_N = z_N$이다. 즉, 동일한 상태에서 시작한 궤적은 동일한 상태로 끝난다.

b) 만약 $x_1 \neq z_1$이라면 $x_N \neq z_N$이다. 즉, 서로 다른 상태에서 시작한 궤적은 서로 다른 상태로 끝난다.

3) *Inverse of a positive matrix (6 points).* 모든 원소가 양수들로 채워져 있고 역행렬이 존재하는 $n \times n$ 행렬 A를 생각하자. 간단하게 $n = 1$인 경우, A의 역행렬은 A의 역수인 $1/A$가 되며 이 또한 양수이다. 이를 일반화하여 n이 1보다 큰 경우에, 모두 양수로 채워진 행렬 A의 역행렬 A^{-1}은 모두 양수로 채워져 있는가? 참/거짓 여부를 판별하고 이유를 설명하시오.

4) *Invertibility (6 points).* 서로 다른 $n \times n$ 행렬 A와 B가 아래의 성질을 만족한다고 하자.

$$A^5 = B^5, \qquad AB^4 = BA^4.$$

이 때, $A^4 + B^4$의 역행렬이 존재하는지 여부를 설명하시오. 존재하지 않는다면 이유를 설명하고, 존재한다면 역행렬을 A와 B를 사용하여 표현하시오.

5) *Checking linear independence. (8 points).* 이 문제에서는 n차원 공간 상의 orthonormal 한 k개의 벡터들 $q_1, \ldots, q_k$가 주어진 상황에서 $(k < n)$, 새로운 벡터 x가 $q_1, \ldots, q_k$의 선형조합으로 표현되는지 여부를 확인하려고 한다.

우선, 주어진 $q_1, \ldots, q_k$를 컬럼으로 갖는 아래의 행렬 $Q \in \mathbb{R}^{n \times k}$를 생각하자.

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 & \cdots & q_k \end{bmatrix}$$

그러면 아래의 두 명제가 동치임을 증명하시오.

$$x\text{가 } q_1, \ldots, q_k\text{의 선형조합으로 표현된다.} \qquad \Longleftrightarrow \qquad (I - QQ^T)x = 0.$$