

ASE3093 Automatic Control: Final Exam (3 problems, 150 minutes)

시험 시작 전, 다음의 '학생 명예선서(Honor Code)'를 답지 맨 위에 적고 서명하십시오.

“나는 정직하게 시험에 응할 것을 서약합니다.”

“By signing this pledge, I promise to adhere to exam requirements and maintain the highest level of ethical principles during the exam period.”

- 1) *T/F questions (16 points)*. 아래의 소문제들에 주어진 각각의 문장이 옳으면 "T"로 (True) 답하고, 틀리면 "F"로 (False) 답하십시오. 주어진 정보가 불충분하여 답을 알 수 없는 경우는 "I"로 (Insufficient information) 답하십시오.

맞은 답에 대해서는 +2점, 답을 적지 않은 경우는 0점, 틀린 답을 적은 경우에는 -3점을 각각 부여할 예정이므로, 확실한 것에 대해서만 답하십시오. 이 문제에 대해서는 부분점수가 없으므로 풀이 과정이나 반례를 제출할 필요 없이 답만 적어내도 좋음. 주어진 문장만으로 일반적으로 받아들여지는 상황을 가정하고 답하십시오 (플랜트 $1/(s+1)$ 은 안정하지만, 전선이 끊어지면 불안정해질 수 있다는 식의 논리는 40점 감점 대상임).

문제 a)부터 e)까지는 아래에 주어진 안정한 시스템 $G_1(s)$ 에 대한 Nyquist diagram을 보고 답하십시오.

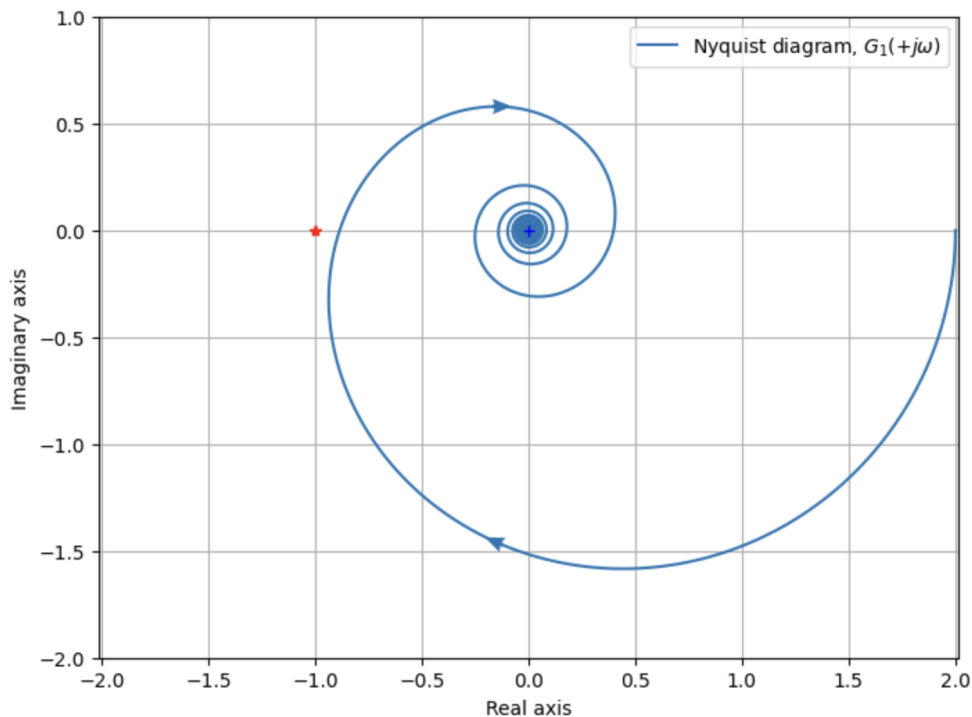


Figure 1: Nyquist plot of open loop stable plant $G_1(s)$

- a) 플랜트 $G_1(s)$ 의 출력 신호를 계측하여 부호를 바꾼 후 입력 신호로 넣어 주면 출력값은 0으로 수렴한다.

- b) 플랜트 $G_1(s)$ 은 60도 이상의 위상 여유를 갖는다.
- c) 플랜트 $G_1(s)$ 은 적분기를 1개 가진 Type-1 시스템이다.
- d) 플랜트 $G_1(s)$ 은 신호지연 성분과 함께 pole을 두 개 가지고 있다.
- e) 플랜트 $G_1(s)$ 의 입력에 크기 1의 단위 스텝 입력을 주면 출력값은 -1.5로 수렴한다.

문제 f)부터 h)까지는 아래에 주어진 시스템 $G_2(s)$ 의 Bode plot을 보고 답하십시오.

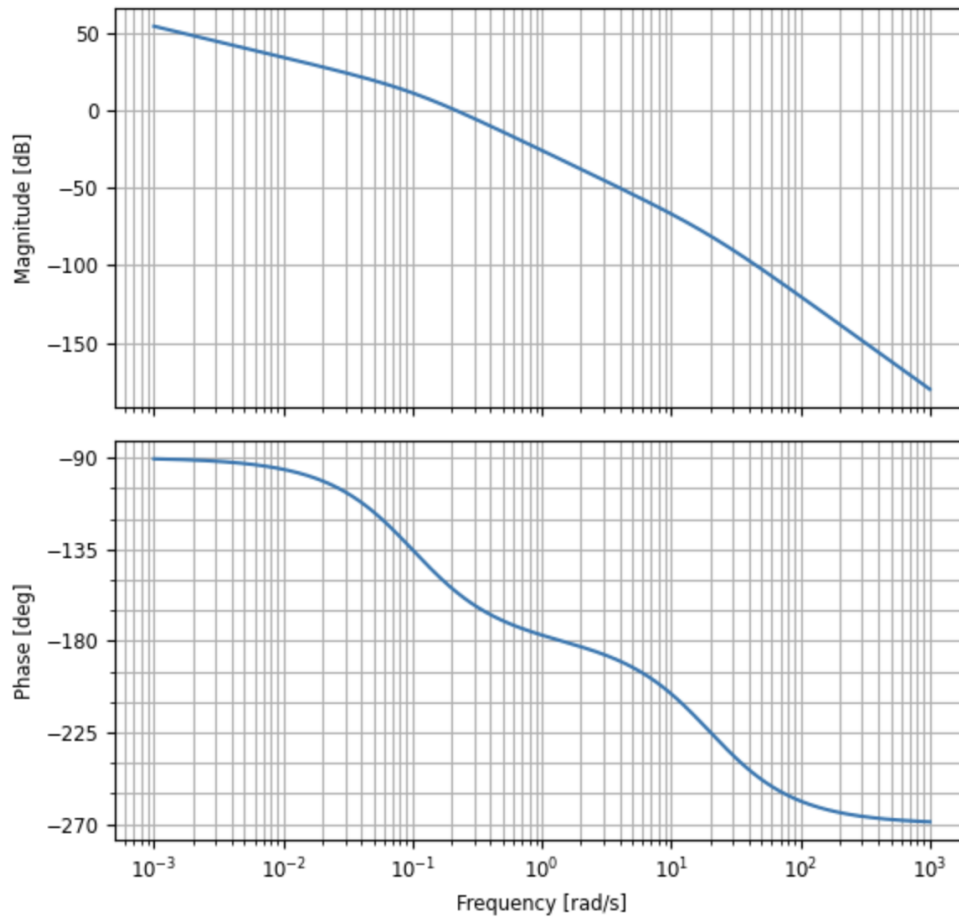


Figure 2: Bode plot of open loop plant $G_2(s)$

- f) 플랜트 $G_2(s)$ 에 negative feedback을 통해 루프를 닫으면 이 시스템은 안정하다.
- g) 플랜트 $G_2(s)$ 에 큰 모델링 오차가 존재하여 실제 시스템이 $10G_2(s)$ 였다고 가정하자. 이 때에 negative feedback을 통해 제어하면 실제 시스템은 안정하다.
- h) 플랜트 $G_2(s)$ 는 두 개의 pole을 갖는다.

2) *European robotic arm (16 points)*. European Robotic Arm (ERA)은 유럽우주국(ESA)에 의해 개발되고 2021년 7월 발사되어 국제우주정거장(ISS)에서 사용되고 있는 로봇 팔로, ISS의 러시아 Nauka 모듈에 장착되어 있다. 사람의 팔처럼 어깨/팔꿈치/손목 등의 관절을 가지고 있어서, 화물 수송, 모듈 점검 및 유지 보수, 과학 실험, 우주비행사 지원 등의 다양한 기능을 수행할 수 있다.

ERA는 약 11미터 정도로 (축구 경기에서 골키퍼와 페널티킥 키커 사이의 거리) 꽤 긴데, 중량 제한으로 인해 매우 얇은 구조로 설계되어 있어, 빠르게 움직일 경우 진동이 유발되는 특징을 가지고 있다. 위에 기술되었던 ERA의 임무 수행을 위해 요구되는 위치 정밀도는 5mm로, 이러한 진동은 성능 저하에 크게 영향을 미치게 된다.

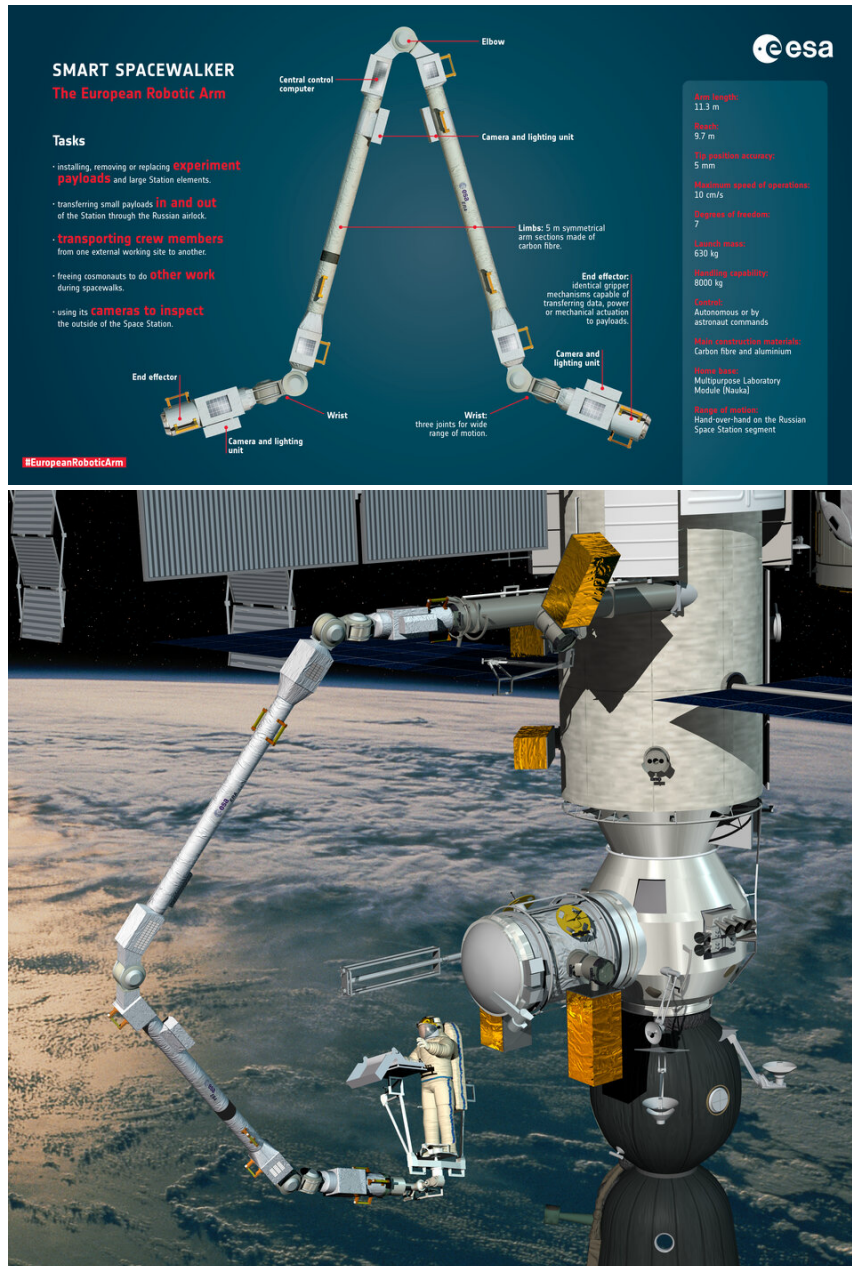


Figure 3: European robotic arm (Photo: ©ESA)

아래의 그림은 한 평형점에 대해, 로봇팔 구동 모터로부터 로봇팔 end effector 끝 위치의 관계를 나타내는 open-loop 전달함수 $G_r(s)$ 의 Bode plot과 스텝 응답이다.

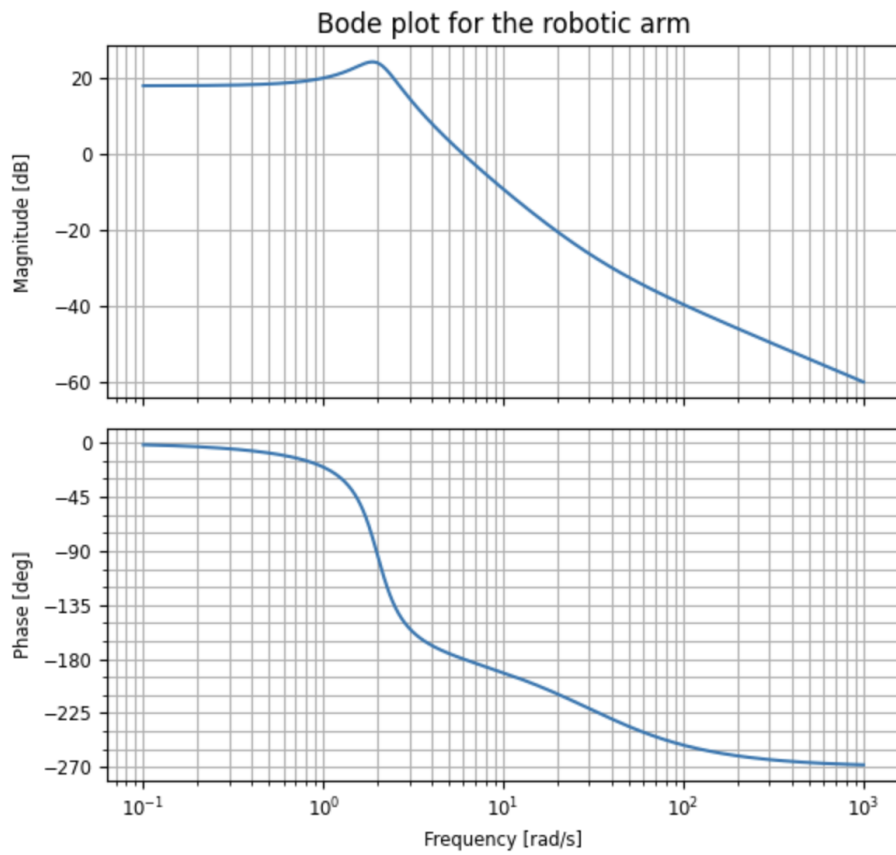


Figure 4: Bode plot for the robotic arm, $G_r(s)$

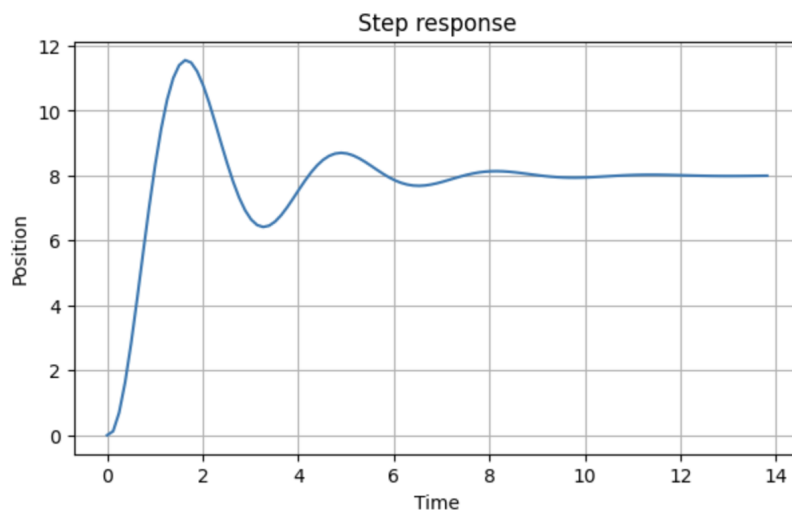


Figure 5: Step response for the robotic arm, $G_r(s)$

아래는 이 로봇팔의 위치 제어를 위한 피드백 제어 구조를 나타내며, 이 로봇팔 위치 제어기의 요구조건은 아래와 같다.

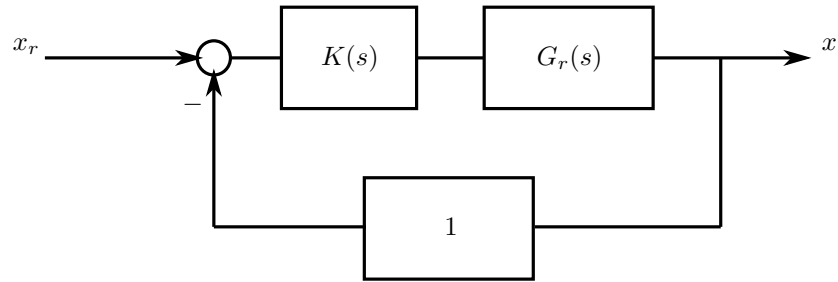


Figure 6: Controller structures for the robotic arm

- Req#1: 스텝 이동 명령에 대해 1% 이내의 steady-state error를 가져야 함.
- Req#2: 스텝 이동 명령에 대해 1% 이내의 overshoot을 가져야 함 (phase margin 이 75도 이상이어야 함).

통상적으로 phase margin이 증가할수록 overshoot은 감소하며, 75도 이상의 phase margin을 갖는 제어시스템은 스텝 입력에 대해 overshoot이 거의 나타나지 않는다.

- 비례 (P) 제어기 $K(s) = K$ 를 사용하여 이 시스템을 제어하려고 한다. 이 시스템을 안정화할 수 있는 K 의 범위를 구하시오 (3 pts).
- 비례 (P) 제어기 $K(s) = K$ 만으로는 이 제어시스템의 요구조건 Req#1과 Req#2를 동시에 만족할 수 없음을 설명하시오 (3 pts).
- 비례-적분 (PI) 제어기 $K(s) = K_p + \frac{K_i}{s}$ 를 사용하면 이 제어시스템의 요구조건 Req#1과 Req#2를 만족하는 제어를 설계할 수 있다. 그 이유와 설계 방법을 주파수 영역 분석을 통해 설명하시오. 설계된 제어시스템의 단점이 있다면 함께 언급하시오 (5 pts).
- 로봇팔 시스템의 전달함수 $G_r(s)$ 를 최대한 자세히 구하고, 그렇게 생각한 이유를 설명하시오 (5 pts).

참고: 문제 c)에서 예상했던 문제점이 실제로도 존재하는지는 다음 유튜브 영상에서 확인할 수 있음 (https://youtu.be/yWzHNo6Tj0A?si=vabWkHxBXuW0I_6k).

- 3) *Robust stability (8 points)*. 아래에 주어진 시스템 $G_x(s)$ 은 5개의 stable pole과 2개의 unstable pole을 가지고 있다. 아래는 $G_x(s)$ 의 Nyquist diagram이다.

$$G_x(s) = \frac{-47.252s^7 - 20.234s^6 - 135.409s^5 + 61.617s^4 + 804.645s^3 + 600.061s^2 + 59.145s + 1.888}{99.870s^7 + 175.505s^6 + 673.738s^5 + 890.511s^4 + 553.174s^3 - 49.227s^2 + 12.145s + 1}$$

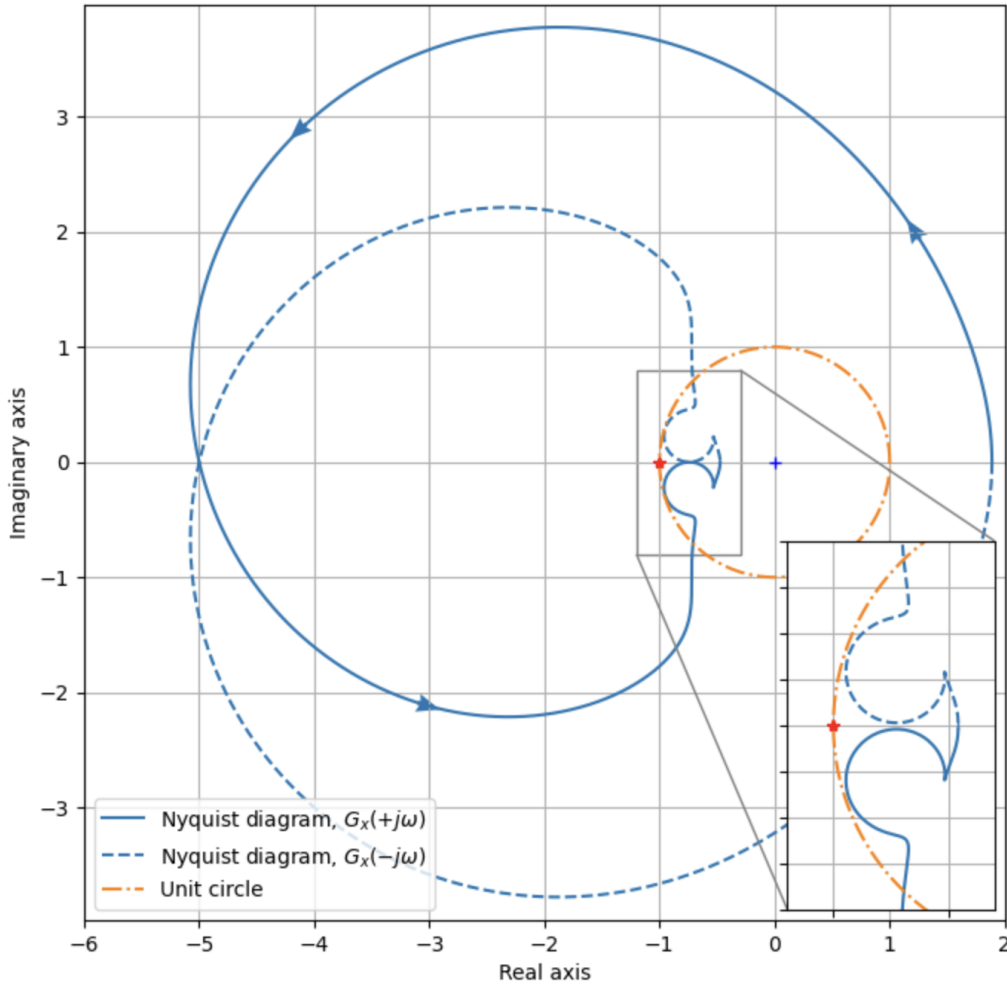


Figure 7: Nyquist diagram for $G_x(s)$

Nyquist diagram에서 -1 주변 영역을 확대한 그림을 (오른쪽 아래) 잘 살펴보자. $G_x(s)$ 의 Nyquist diagram에서 -1 주변에 존재하는 혹 모양의 그래프는 실수축과도 약간 떨어져 있고 단위원과도 약간 떨어져 있어서, 실제로 $G_x(s)$ 는 6dB 이상의 게인 여유와 40도 이상의 위상 여유를 갖는, 적어도 수치적으로는 충분히 큰 안정여유를 가진 시스템이다.

그러나 이 시스템에서 게인과 위상이 동시에 변화하게 되면 이 시스템의 안정여유는 갑자기 크게 줄어들 것으로 예상할 수 있으며, 충분히 안정적이라고 표현하기에는 다소 무리가 있다. 예를 들어, 10%의 게인 증가와 5도의 위상 지연이 동시에 발생해도 이 페루프 시스템은 불안정해지게 된다. 이 예제는 게인 변화와 위상 변화를 독립적으로 분석하는 고전적 안정 여유 분석 기법의 한계점을 보여준다.

이 문제에서는 이 단점을 보완하기 위해 게인 변화와 위상 변화를 동시에 고려할 수 있는 안정 여유 분석 방법을 알아보려고 한다.

자, 이제 시스템의 모델링 불확실성을 표현하는 $\Delta \in \mathbb{C}$ 와 $W(s)$ 를 포함한 아래의 폐루프 시스템을 살펴보자. 불확실성이 존재하지 않는 $\Delta W(s) = 0$ 인 경우 아래의 제어시스템은 안정하다고 가정한다.

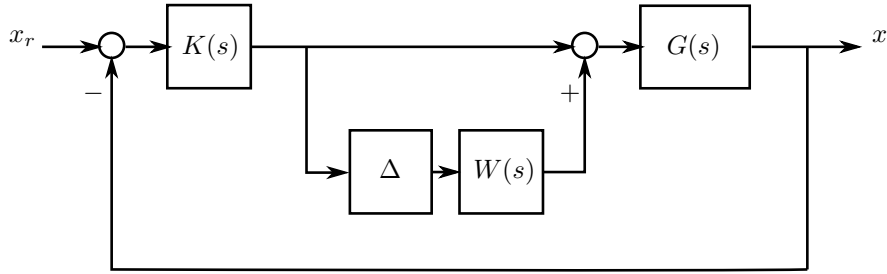


Figure 8: Feedback control with uncertainty block $\Delta W(s)$

참고로, $W(s) = 1$ 일 때, 불확실성 블럭 Δ 는 아래와 같은 특별한 경우에 우리 수업에서 다루었던 모델링 불확실성을 표현할 수 있음을 알 수 있다.

- $\Delta = 0$ 인 경우 불확실성이 없는 공칭(nominal) 플랜트를 표현함.
- $\Delta \in \mathbb{R}$ 가 실수인 경우, 플랜트의 게인 변화를 표현함. 이 시스템의 게인여유와 게인 감소여유가 각각 GM, GRM인 경우, $\Delta_G \in \{\Delta \mid \text{GRM}-1 \leq \Delta \leq \text{GM}-1, \Delta \in \mathbb{R}\}$ 에 대해 폐루프 시스템은 안정함.
- $\Delta = e^{j\phi} - 1 \in \mathbb{C}$ 형태의 복소수 Δ 는 ϕ (rad)의 플랜트 위상 변화를 표현함. 이 제어 시스템의 위상 여유가 PM인 경우, $\Delta_P \in \{\Delta \mid \Delta = e^{-j\phi} - 1, \phi \leq \text{PM}\}$ 에 대해 폐루프 시스템은 안정함.

즉, 우리가 수업에서 살펴보았던 게인 여유와 위상 여유는 아래(왼쪽)의 그림과 같이 복소평면에서 Δ 가 Δ_G 와 Δ_P 로 표현되는 두 곡선 (직선과 곡선) 위에 있는 경우에만 폐루프 안정성을 보장하게 된다. 그러나 게인과 위상이 동시에 변화하는 경우(Δ 가 두 곡선 위에 있지 않은 경우)에 대해서는 안정성을 설명하지 못한다는 단점이 있다.

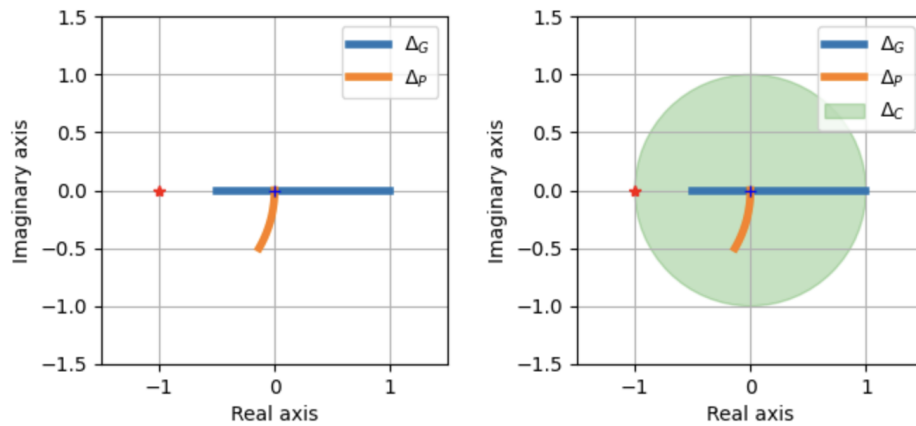


Figure 9: Margin $\Delta_G, \Delta_P, \Delta_C$ (GM=6dB, GRM=-6dB, PM=30 deg, CM=1)

반면, 위(오른쪽) 그림에 표현된 바와 같이, 복소평면 상의 디스크 $\Delta_C = \{\Delta \mid |\Delta| \leq \text{CM}, \Delta \in \mathbb{C}\}$ 의 반경을 표현하는 CM(Complex Margin)을 정의한후, $\Delta \in \Delta_C$ 에 대해 안정성을 보장할 수 있다면, 게인과 위상이 동시에 변하는 경우에 대해서도 안정성을 보장할 수 있어, 훨씬 강인하게 안정성을 설명할 수 있는 수단을 가질 수 있다.

- a) 벡터의 크기를 표현하기 위해 norm을 정의했던 것처럼, 시스템(전달함수)에 대해서도 적절한 norm을 정의함으로써 시스템의 크기를 표현할 수 있다. 안정한 시스템 $G(s)$ 에 대해 H_∞ -norm은 $\|G(s)\|_\infty$ 로 표기하며, 아래와 같이 정의한다.

$$\|G(s)\|_\infty = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} |G(j\omega)|$$

위에서 $\sup(\cdot)$ 연산자는 최소의 상한치(least upper bound)를 의미하는데, 대충 최대값 연산과 비슷하다고 보면 된다. 즉, $\|G(s)\|_\infty$ 는 모든 실수 ω 에 대한 $|G(j\omega)|$ 의 최대값을 의미하므로, $G(s)$ Bode magnitude plot에서의 peak 값(또는 점근적으로 접근할 수 있는 가장 큰 값)으로 생각할 수 있다.

문제 1), 2), 3)에 보였던 $G_1(s)$, $G_r(s)$, $G_x(s)$ 에 대해, $\|G_1(s)\|_\infty$, $\|G_r(s)\|_\infty$, $\|G_x(s)\|_\infty$ 이 어느 정도 되는지 대략적으로 답하십시오 (3 pts).

- b) 제어기 $K(s)$ 가 nominal 플랜트 $G(s)$ 를 안정화한다고 ($\Delta = 0$ 일 때 페루프 시스템이 안정하다고) 가정하자. 또한, 제어기 $K(s)$ 가 다음의 조건을 만족하도록 설계되었다고 가정하자.

$$\|W(s)G(s)K(s)(1 + G(s)K(s))^{-1}\|_\infty \leq 1$$

그러면 $\Delta_C = \{\Delta \mid |\Delta| \leq 1, \Delta \in \mathbb{C}\}$ 내부의 Δ 로 표현되는 모든 불확실성에 대해서도 Figure 8의 페루프 시스템은 안정함을 설명하십시오 (5 pts).