자동제어(Automatic Control)
8장 상태공간 해석과 제어기 설계

교재: Automatic Control Systems

경희대학교
Kyung Hee University

상태방정식의 벡터행렬표현

- n차 동적시스템의 n개 상태방정식

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = f_i[x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t), \ u_1(t), u_2(t), \ldots, u_p(t), w_1(t), w_2(t), \ldots, w_v(t)]$$

여기서 $i=1, 2, ..., n$이다. i번째 상태변수는 $x_i(t)$로 나타냈고 $u_j(t)$는 $j=1, 2, ..., p$에 대하여 j번째 입력으로 그리고 $w_k(t)$는 $k=1, 2, ..., v$에 대하여 k번째 외란 입력을 나타낸다.

- 출력방정식은

$$y_j(t) = g_j[x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \ldots, u_p(t), w_1(t), w_2(t), \ldots, w_v(t)]$$

- n개의 상태방정식과 q개의 출력방정식→ 동적방정식

상태방정식의 벡터행렬형

상태벡터: $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$ $(n \times 1)$

입력벡터: $\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_p(t) \end{bmatrix}$ $(p \times 1)$

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{w}(t)]$$

출력벡터: $\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_q(t) \end{bmatrix}$ $(q \times 1)$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{w}(t)]$$

외란벡터: $\mathbf{w}(t) = \begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \\ \vdots \\ w_v(t) \end{bmatrix}$ $(v \times 1)$

선형시불변 시스템의 동적방정식

상태방정식: $$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{E}\mathbf{w}(t)$$

출력방정식: $$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) + \mathbf{H}\mathbf{w}(t)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (n \times n) \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{q1} & c_{q2} & \cdots & c_{qn} \end{bmatrix} \quad (q \times n)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix} \quad (n \times p) \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1p} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{q1} & d_{q2} & \cdots & d_{qp} \end{bmatrix} \quad (q \times p)$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & \cdots & e_{1v} \\ e_{21} & e_{22} & \cdots & e_{2v} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{n1} & e_{n2} & \cdots & e_{nv} \end{bmatrix} \quad (n \times v) \qquad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1v} \\ h_{12} & h_{22} & \cdots & h_{2v} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{q1} & h_{q2} & \cdots & h_{qv} \end{bmatrix} \quad (q \times v)$$

상태천이행렬(State-Transition Matrix)

- 상태방정식이 만들어지면,
  - 방정식의 해를 $t \geq t_0$ 에 대하여 초기상태 벡터 $x(t_0)$, 입력벡터 $u(t)$와 외란벡터 $w(t)$로 구함
- 상태천이행렬

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$$

$\boldsymbol{\phi}(t)$를 상태천이행렬을 나타내는 $n \times n$ 행렬이라 하면

$$\frac{d\boldsymbol{\phi}(t)}{dt} = \mathbf{A}\boldsymbol{\phi}(t)$$

$\mathbf{x}(0)$로 $t=0$에서의 초기상태를 나타낸다면

$$\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\phi}(t)\mathbf{x}(0)$$ $t \geq 0$에 대한 제차상태방정식의 해

상태천이행렬 구하기(1)

- 라플라스변환

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s)$$

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0)$$

- 역라플라스변환

$$\mathbf{x}(t) = \mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}]\mathbf{x}(0) \qquad t \geq 0$$

- 따라서

$$\boxed{\boldsymbol{\phi}(t) = \mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}]}$$

상태천이행렬 구하기(2)

- 고전적인 방법
- 해를 다음과 같이 가정

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0)$$

제차상태방정식의 해임을 쉽게 알 수 있기 때문에

$$\frac{de^{\mathbf{A}t}}{dt} = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}$$

$e^{\mathbf{A}t}$는 다음과 같이 행렬 $\mathbf{A}t$의 멱급수로 나타낼 수 있다.

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2t^2 + \frac{1}{3!}\mathbf{A}^3t^3 + \cdots$$

$$\boldsymbol{\phi}(t) = e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2t^2 + \frac{1}{3!}\mathbf{A}^3t^3 + \cdots$$

상태천이행렬이란?

- 시스템의 자유응답(free response)
  - 초기조건만으로 여기된 응답
  - **A**의 상태천이행렬
  - 입력이 영일 때 *t=0*인 초기시간부터 임의의 *t*까지의 천이를 정의
- 성질

1. $\boldsymbol{\phi}(0)=\mathrm{I}$ (the identity matrix)

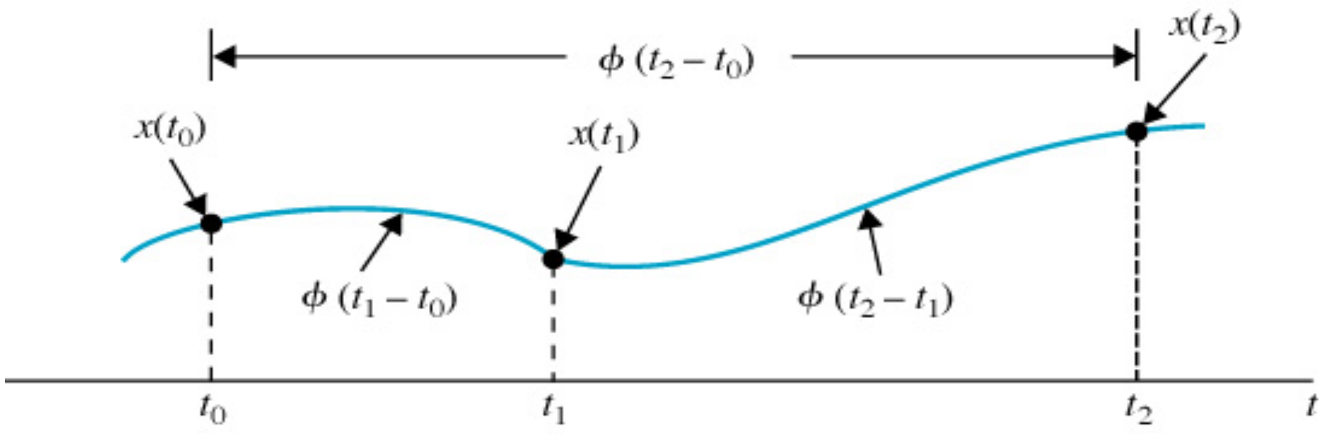
2. $\boldsymbol{\phi}^{-1}(t)=\boldsymbol{\phi}(-t)$

3. $\boldsymbol{\phi}(t_2-t_1)\boldsymbol{\phi}(t_1-t_0)=\boldsymbol{\phi}(t_2-t_0)$ for any t_0, t_1, t_2,

4. $[\boldsymbol{\phi}(t)]^k=\boldsymbol{\phi}(kt)$ for k=positive integer

Figure 8-3

Property of the state-transition matrix.



상태천이방정식

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{E}\mathbf{w}(t)$$

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s) + \mathbf{E}\mathbf{W}(s)$$

$\mathbf{x}(0)$는 $t=0$에서 계산된 초기상태 벡터를 나타낸다.

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0) + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}[\mathbf{B}\mathbf{U}(s) + \mathbf{E}\mathbf{W}(s)]$$

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) &= \mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}]\mathbf{x}(0) + \mathcal{L}^{-1}\{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}[\mathbf{B}\mathbf{U}(s) + \mathbf{E}\mathbf{W}(s)]\} \\ &= \boldsymbol{\phi}(t)\mathbf{x}(0) + \int_0^t \boldsymbol{\phi}(t - \tau)[\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) + \mathbf{E}\mathbf{w}(\tau)]d\tau \qquad t \geq 0\end{aligned}$$

$$\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\phi}(t - t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \boldsymbol{\phi}(t - \tau)[\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) + \mathbf{E}\mathbf{w}(\tau)]d\tau \qquad t \geq t_0$$

- Example 8-6-1

$$\begin{bmatrix} \dfrac{dx_1(t)}{dt} \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$t \geq 0$에 대해서 입력이 $u(t)=1$일 때,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{E} = 0$$

$$s\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}$$

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\phi}(t) = \mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}] = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} \mathbf{x}(0)$$

$$+ \int_0^t \begin{bmatrix} 2e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)} & e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)} \\ -2e^{-(t-\tau)} + e^{-2(t-\tau)} & -e^{-(t-\tau)} + 2e^{-2(t-\tau)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} d\tau$$

$$\boxed{\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} \mathbf{x}(0) + \begin{bmatrix} 0.5 - e^{-t} + 0.5e^{-2t} \\ e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix} \quad t \geq 0}$$

$$\mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}]\mathbf{BU}(s) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2 + 3s + 2} \begin{bmatrix} s + 3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{s} \right)$$

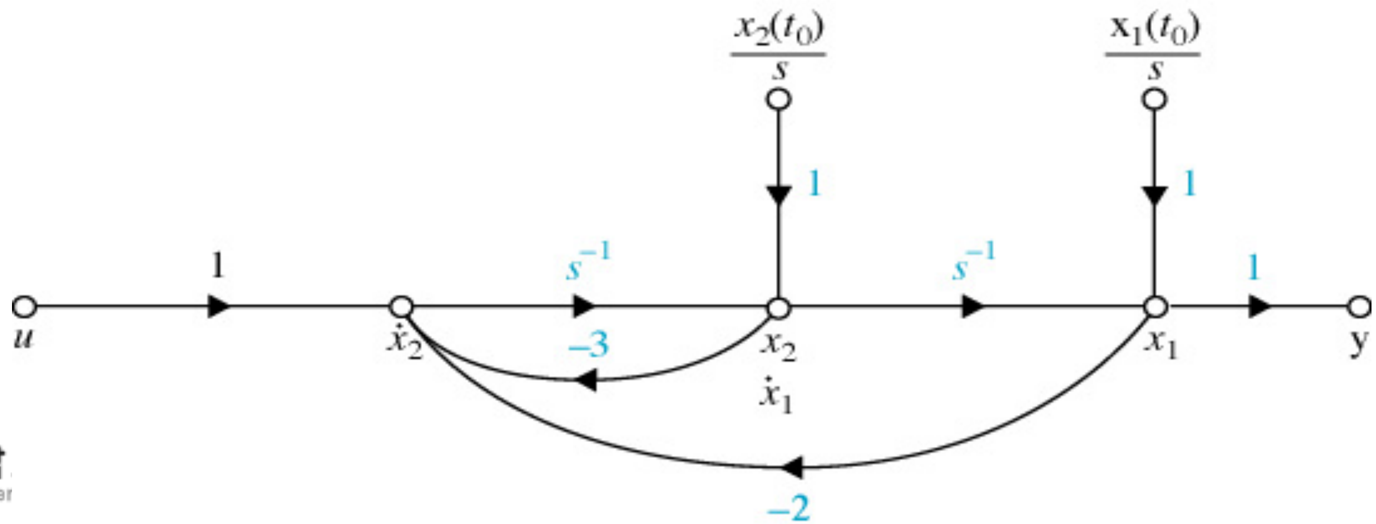
$$= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2 + 3s + 2} \begin{bmatrix} \frac{1}{s} \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0.5 - e^{-t} + 0.5e^{-2t} \\ e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix}$$

상태선도로부터 결정된 상태천이방정식

- 상태천이방정식을 구하는 데 상태선도방법을 사용할 수 있다.
- Example 8-6-2

$$\begin{bmatrix} \dfrac{dx_1(t)}{dt} \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$t \geq 0$에 대해서 입력이 $u(t)=1$일 때,



경희대학
Kyung Hee Univer

$$X_1(s) = \frac{s^{-1}(1 + 3s^{-1})}{\Delta} x_1(t_0) + \frac{s^{-2}}{\Delta} x_2(t_0) + \frac{s^{-2}}{\Delta} U(s)$$

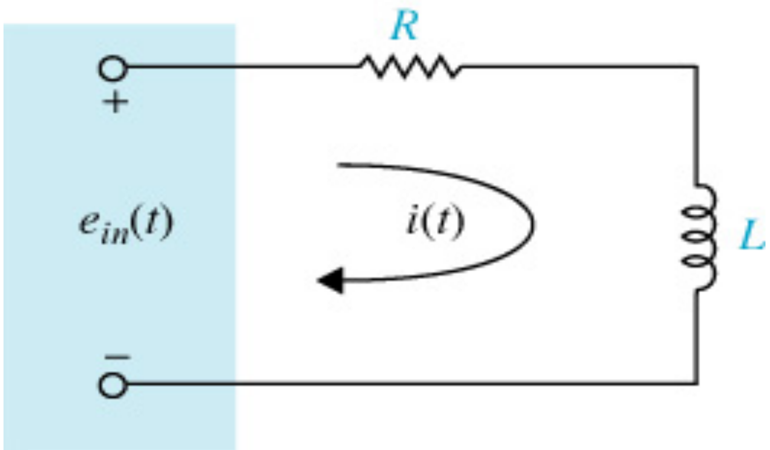
$$X_2(s) = \frac{-2s^{-2}}{\Delta} x_1(t_0) + \frac{s^{-1}}{\Delta} x_2(t_0) + \frac{s^{-1}}{\Delta} U(s)$$

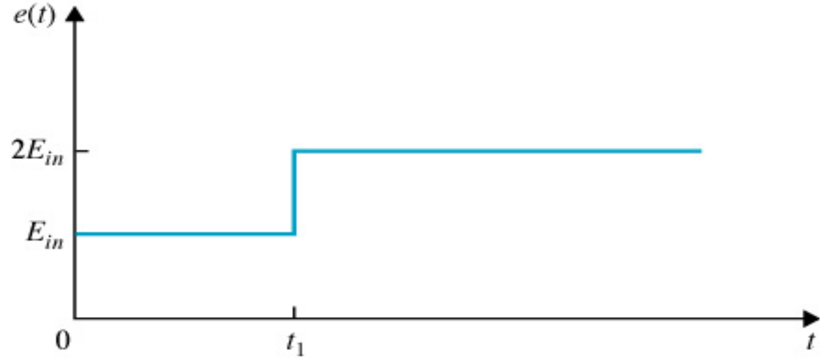
$$\Delta = 1 + 3s^{-1} + 2s^{-2}$$

$$\begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \end{bmatrix} + \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} 1 \\ s \end{bmatrix} U(s)$$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{-(t-t_0)} - e^{-2(t-t_0)} & e^{-(t-t_0)} - e^{-2(t-t_0)} \\ -2e^{-(t-t_0)} + 2e^{-2(t-t_0)} & -e^{(t-t_0)} + 2e^{-2(t-t_0)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.5u_s(t-t_0) - e^{-(t-t_0)} + 0.5e^{-2(t-t_0)} \\ e^{-(t-t_0)} - e^{-2(t-t_0)} \end{bmatrix} \qquad t \geq t_0$$

Example 8-6-3





$t=0$에서 $i(0)$

$t \geq 0$에서

$$\frac{di(t)}{dt} = -\frac{R}{L}i(t) + \frac{1}{L}e_{in}(t)$$

$$\phi(t) = e^{-At} = e^{-Rt/L}$$

입력전압을

$$e(t) = E_{in}u_s(t) + E_{in}u_s(t - t_1)$$

$$E_{in}(s) = \frac{E_{in}}{s}(1 + e^{-t_1 s})$$

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s) = \frac{E_{in}}{Ls(s + R/L)}(1 + e^{-t_1 s})$$

$$i(t) = e^{-Rt/L}\, i(0)u_s(t) + \frac{E_{in}}{R}(1 - e^{-Rt/L})u_s(t) + \frac{E_{in}}{R}(1 - e^{-R(t-t_1)/L})u_s(t - t_1)$$

- 또 다른 방법 (구간별로 구하기):

천이구간을 두 부분, 즉 $t=0$에서 $t=t_1$까지와 $t=t_1$에서 $t=\infty$까지로 나눌 수 있다.

$$e(t) = E_{in}u_s(t) \qquad 0 \le t < t_1$$

$$i(t) = \left[e^{-Rt/L}\, i(0) + \frac{E_{in}}{R}(1 - e^{-Rt/L}) \right] u_s(t)$$

$$i(t_1) = e^{-Rt_1/L}\, i(0) + \frac{E_{in}}{R}(1 - e^{-Rt_1/L})$$

조심

$$i(t) = e^{-R(t-t_1)/L}\, i(t_1) + \frac{2E_{in}}{R}(1 - e^{-R(t-t_1)/L}) \qquad t \ge t_1$$

고차미분방정식

- 위상변수표준형(phase-variable canonical form) 또는 가제어성표준형(controllability canonical form)

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \qquad y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) = x_1(t)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad (n \times n) \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (n \times 1)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Example 8-7-1

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 5\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = u(t)$$

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} = -5\frac{d^2y(t)}{dt^2} - \frac{dy(t)}{dt} - 2y(t) + u(t)$$

$$x_1(t) = y(t)$$

$$x_2(t) = \frac{dy(t)}{dt}$$

$$x_3(t) = \frac{d^2y(t)}{dt^2}$$

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -5 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$y(t) = x_1(t) = [1 \quad 0]\mathbf{x}(t)$$

전달함수와의 관계

- 선형시불변시스템이 다음의 동적방정식으로 표현되면,

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{E}\mathbf{w}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) + \mathbf{H}\mathbf{w}(t)$$

$\mathbf{x}(t) = n \times 1$ 상태벡터,

$\mathbf{y}(t) = q \times 1$ 출력벡터

$\mathbf{u}(t) = p \times 1$ 입력벡터,

$\mathbf{w}(t) = v \times 1$ 외란벡터

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0) + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}[\mathbf{B}\mathbf{U}(s) + \mathbf{E}\mathbf{W}(s)]$$

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + \mathbf{D}\mathbf{U}(s) + \mathbf{H}\mathbf{W}(s)$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0) + \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}[\mathbf{B}\mathbf{U}(s) + \mathbf{E}\mathbf{W}(s)] + \mathbf{D}\mathbf{U}(s) + \mathbf{H}\mathbf{W}(s)$$

전달함수의 정의는 초기조건을 영으로, 즉 $\mathbf{x}(0)=\mathbf{0}$이 요구되므로

$$\mathbf{Y}(s) = [\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}]\mathbf{U}(s) + [\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{E} + \mathbf{H}]\mathbf{W}(s)$$

$$\mathbf{G}_u(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$
$$\mathbf{G}_w(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{E} + \mathbf{H}$$

$\mathbf{G}_u(s)$는 $\mathbf{w}(t)=\mathbf{0}$일 때 $\mathbf{u}(t)$와 $\mathbf{y}(t)$ 사이의 $q\times p$인 전달함수행렬이고,

$\mathbf{G}_w(s)$는 $\mathbf{u}(t)=0$일 때 $\mathbf{w}(t)$와 $\mathbf{y}(t)$ 사이의 $q\times v$인 전달함수행렬이다.

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{G}_u(s)\mathbf{U}(s) + \mathbf{G}_w(s)\mathbf{W}(s)$$

Example 8-8-1

$$\frac{d^2 y_1(t)}{dt^2} + 4\frac{dy_1(t)}{dt} - 3y_2(t) = u_1(t) + 2w(t)$$

$$\frac{dy_1(t)}{dt} + \frac{dy_2(t)}{dt} + y_1(t) + 2y_2(t) = u_2(t)$$

$$x_1(t) = y_1(t)$$

$$x_2(t) = \frac{dy_1(t)}{dt}$$

$$x_3(t) = y_2(t)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1(t)}{dt} \\ \frac{dx_2(t)}{dt} \\ \frac{dx_3(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} w(t)$$

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \mathbf{Cx}(t)$$

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s+4 & -3 \\ 1 & 1 & s+2 \end{bmatrix} \qquad |s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = s^3 + 6s^2 + 11s + 3$$

$$(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}=\frac{1}{|s\mathbf{I}-\mathbf{A}|}\begin{bmatrix} s^2+6s+11 & s+2 & 3 \\ -3 & s(s+2) & 3s \\ -(s+4) & -(s+1) & s(s+4) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}_u(s)=\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}=\frac{1}{s^3+6s^2+11s+3}\begin{bmatrix} s+2 & 3 \\ -(s+1) & s(s+4) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}_w(s)=\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{E}=\frac{1}{s^3+6s+11s+3}\begin{bmatrix} 2(s+2) \\ -2(s+1) \end{bmatrix}$$

- 다른 방법

$$\begin{bmatrix} s(s+4) & -3 \\ s+1 & s+2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}W(s)$$

$$\mathbf{Y}(s)=\mathbf{G}_u(s)\mathbf{U}(s)+\mathbf{G}_w(s)W(s)$$

$$\mathbf{G}_u(s)=\begin{bmatrix} s(s+4) & -3 \\ s+1 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} \qquad \mathbf{G}_w(s)=\begin{bmatrix} s(s+4) & -3 \\ s+1 & s+2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

특성방정식(Characteristic Equation)

- 미분방정식으로부터 특성방정식 구하기

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t)$$

$$= b_m\frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1}\frac{d^{m-1}u(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1\frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t) \qquad n > m$$

$$(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0)y(t)$$

$$= (b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0)u(t)$$

특성방정식(characteristic equation)은

$$s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0$$

특성방정식(Characteristic Equation)

- 전달함수로부터 특성방정식 구하기

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

특성방정식은 전달함수의 분모다항식을 0으로 놓아 얻는다.

- 상태방정식으로부터 특성방정식 구하기

$$\mathbf{G}_u(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \quad = \mathbf{C}\frac{\operatorname{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}{|s\mathbf{I} - \mathbf{A}|}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0$$

고유치(Eigenvalue)

특성방정식의 근을 보통 행렬 **A** 의 고유치(eigenvalue)라 한다.

- 다양한 고유치의 특성

1. 만일 **A**의 계수가 모두 실수이면, 그 고유치는 실수이거나 복소공액쌍이다.

2. 만일 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$이 **A**의 고유치라면

$$\mathrm{tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \tag{5-118}$$

즉 **A**의 고유합(trace)은 **A**의 모든 고유치의 합이다.

3. 만일 λ_i, $i=1, 2, \ldots, n$이 **A**의 고유치이면 이 값들은 $\mathbf{A}'$의 고유치이다.

4. 만일 **A**가 정칙(nonsingular)으로 고유치 λ_i, $i=1, 2, \ldots, n$을 갖는다면 $1/\lambda_i$, $i=1, 2, \ldots, n$은 $\mathbf{A}^{-1}$의 고유치이다.

경희대학교
Kyung Hee University

고유벡터(Eigenvector)

다음 행렬방정식을 만족시키는 임의의 영이 아닌 벡터 $\mathbf{p}_i$를

$$(\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{p}_i = \mathbf{0}$$

고유치 λ_i와 관련된 $\mathbf{A}$의 **고유벡터**(eigenvector)라 한다. 여기서 λ_i, $i=1, 2, \ldots, n$은 $\mathbf{A}$의 i번째 고유치를 나타낸다.

- Example 8-9-5

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{E} = \mathbf{0}$$

특성방정식은

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = s^2 - 1$$

고유치는 $\lambda_1 = 1$과 $\lambda_2 = -1$이다.

고유벡터를 다음과 같이 표기하자.

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{bmatrix}$$

$\lambda_1=1$ 과 $\mathbf{p}_1$ 을 식 (5-120)에 대입하면

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

그러므로 $p_{21}=0$ 이고 p_{11} 은 임의적인데 이 경우에서는 1 로 놓을 수 있다.

같은 방법으로 $\lambda_2=-1$ 에 대하여 식 (5-120)은

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad -2p_{12} + p_{22} = 0$$

$p_{12}=1$ 로 놓으면 $p_{22}=2$ 가 된다.

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

일반화된 고유벡터

- 만일 $\mathbf{A}$가 다중차수의 고유치이고 비대칭이면 앞서의 식만으로는 구할 수 없다.
- $\mathbf{A}$의 n개 고유치 중에 a개가 상이하다고 하면 q개의 다른 고유치는 $(\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{p}_i = \mathbf{0}$ 로 구하고, n-q차수의 고유치는

$$
\begin{aligned}
(\lambda_j \mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{p}_{n-q+1} &= \mathbf{0} \\
(\lambda_j \mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{p}_{n-q+2} &= -\mathbf{p}_{n-q+1} \\
(\lambda_j \mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{p}_{n-q+3} &= -\mathbf{p}_{n-q+2} \\
&\vdots \\
(\lambda_j \mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{p}_{n-q+m} &= -\mathbf{p}_{n-q+m-1}
\end{aligned}
$$

Example 8-9-6

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 6 & -5 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{A}$ 의 고유치는 $\lambda_1=2,\ \lambda_2=\lambda_3=1$ 이다.

$\lambda_1=2$ 에 관련된 고유벡터는

$$(\lambda_1\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 2 & -6 & 5 \\ -1 & 2 & -2 \\ -3 & -2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ p_{31} \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

두 개의 서로 독립인 방정식이 있기 때문에 임의로 $p_{11}=2$ 로 놓으면 $p_{21}=-1$ 과 $p_{31}=-2$ 를 얻는다.

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

중근의 고유치에 관한 일반화된 고유벡터를 얻기 위해서, $\lambda_2 = 1$ 을 대입한다.

$$(\lambda_2 \mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -6 & 5 \\ -1 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \\ p_{32} \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

$p_{21} = 1$ 로 놓으면, $p_{22} = -3/7$ 과 $p_{32} = -5/7$ 를 얻는다.

$$\mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{3}{7} \\ -\frac{5}{7} \end{bmatrix}$$

$$(\lambda_3 \mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} 1 & -6 & -5 \\ -1 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{13} \\ p_{23} \\ p_{33} \end{bmatrix} = -\mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{3}{7} \\ \frac{5}{7} \end{bmatrix}$$

임의로 $p_{13} = 1$ 로 놓음으로써

$$\mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{22}{49} \\ -\frac{46}{49} \end{bmatrix}$$

상사변환(Similarity Transformation)

- SISO 시스템의 동적방정식

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t)$$

$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}u(t)$$

$\mathbf{x}(t)$는 $n \times 1$ 상태벡터이고 $u(t)$와 $y(t)$는 각각 스칼라입력과 출력

- 똑같은 차원의 다른 방정식으로 변환

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{P}\bar{\mathbf{x}}(t)$$

$\mathbf{P}$는 $n \times n$인 정칙행렬

$$\bar{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}(t)$$

양변을 t 에 관해서 도함수를 취하면

$$\frac{d\bar{\mathbf{x}}(t)}{dt} = \mathbf{P}^{-1}\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}u(t)$$

$$= \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\bar{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}u(t)$$

비교

$$\frac{d\bar{\mathbf{x}}(t)}{dt} = \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}}(t) + \bar{\mathbf{B}}u(t)$$

$$y(t) = \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{x}}(t) + \bar{\mathbf{D}}u(t)$$

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} \qquad \bar{\mathbf{B}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}$$

$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{x}(t) + \bar{\mathbf{D}}u(t)$$

$$\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{P} \qquad \bar{\mathbf{D}} = \mathbf{D}$$

- 변환된 시스템에서 특성방정식, 고유벡터, 고유치, 그리고 전달함수와 같은 성질들이 모두 변환에 의해서 변화를 일으키지 않기 때문에 상사변환 (similarity transformation)

시스템의 특성방정식은 $|s\mathbf{I}-\overline{\mathbf{A}}|=0$

$$|s\mathbf{I} - \overline{\mathbf{A}}| = |s\mathbf{I} - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}| = |s\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P} - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}|$$

$$|s\mathbf{I} - \overline{\mathbf{A}}| = |\mathbf{P}^{-1}||s\mathbf{I} - \mathbf{A}||\mathbf{P}| = |s\mathbf{I} - \mathbf{A}|$$

본래의 고유치와 고유벡터와 같게 된다.

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{G}}(s) &= \overline{\mathbf{C}}(s\mathbf{I} - \overline{\mathbf{A}})^{-1}\overline{\mathbf{B}} + \overline{\mathbf{D}} \\ &= \mathbf{C}\mathbf{P}(s\mathbf{I} - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P})^{-1}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}\end{aligned}$$

$$\overline{\mathbf{G}}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} = \mathbf{G}(s)$$

가제어성표준형(Controllability Canonical Form)

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{SM}$$

$$\mathbf{S} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \ldots \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$$

가제어성행렬(controllability matrix).

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & a_3 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- S의 역행렬이 존재해야 함

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{B}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

예제 8-10-2

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} s-1 & -2 & -1 \\ 0 & s-1 & -3 \\ -1 & -1 & s-1 \end{vmatrix} = s^3 - 3s^2 - s - 3 = 0$$

$$a_0 = -3,\ a_1 = -1,\ a_2 = -3$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ a_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{S} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 0 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{SM} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \overline{\mathbf{A}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \overline{\mathbf{B}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

가관측성표준형(Observability Canonical Form)

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{Q}\bar{\mathbf{x}}(t)$$

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q} \qquad \bar{\mathbf{B}} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B} \qquad \bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{Q} \qquad \bar{\mathbf{D}} = \mathbf{D}$$

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{M}\mathbf{V})^{-1}$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & a_3 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

가관측성행렬(observability matrix)

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix} \qquad (n \times n)$$

V의
역행렬이
존재해야 함

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{Q} = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1]$$

예제 8-10-2

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ 5 & 9 & 14 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{MV})^{-1} = \begin{bmatrix} 0.3333 & -0.1667 & 0.3333 \\ -0.3333 & 0.1667 & 0.6667 \\ 0.1667 & 0.1667 & 0.1667 \end{bmatrix}$$

$$\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{AQ} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \overline{\mathbf{C}} = \mathbf{CQ} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \overline{\mathbf{B}} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

대각선표준형

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{T}\overline{\mathbf{x}}(t)$$

$$\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} \qquad \overline{\mathbf{B}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B} \qquad \overline{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{T} \qquad \overline{\mathbf{D}} = \mathbf{D}$$

$$\overline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \qquad (n \times n)$$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$은 **A**의 n개의 상이한 고유치

$$\mathbf{T} = [\mathbf{p}_1 \quad \mathbf{p}_2 \quad \mathbf{p}_3 \quad \cdots \quad \mathbf{p}_n]$$

$$\lambda_i\mathbf{p}_i = \mathbf{A}\mathbf{p}_i \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

행렬 **A**가 CCF로 구성되고 **A**가 서로 다른 고유치를 가지면

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \lambda_3^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

- Example 8-10-3 고유치 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = -3$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Jordan 표준형

- 행렬 A가 다중근의 고유치를 가질때,

$$
\overline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}
$$

1. 주대각선 상 요소가 고유치이다.

2. 주대각선 밑에 있는 요소는 0이다.

3. 식 (8-222)에서 설명되는 것처럼 주대각선 상 다중근의 고유치 바로 위에 있는 몇몇 요소는 1이다.

4. 고유치와 함께 1들은 **Jordan 블록**이라 하는 전형적인 블록을 형성한다. 식 (8-222)에 나타낸 것처럼 Jordan 블록은 점선으로 둘러싸여 있다.

5. 비대칭행렬 **A**가 다중근의 고유치를 가질 때, 그 고유벡터는 선형 독립이 아니다. $n \times n$인 **A**에 대해 오직 $r(r < n)$의 선형독립인 고유벡터가 있다.

6. Jordan 블록의 수는 독립된 고유벡터 r의 수와 같다. 각각의 Jordan 블록에 대응하는 선형독립인 고유벡터는 오직 한 개만 존재한다.

7. 주대각선 상부에 존재하는 1의 개수는 $n-r$이다.

예제 8-10-4

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 6 & -5 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{A}$의 고유치는 $\lambda_1=2$, $\lambda_2=\lambda_3=1$이다.

$\lambda_1=2$에 관련된 고유벡터는

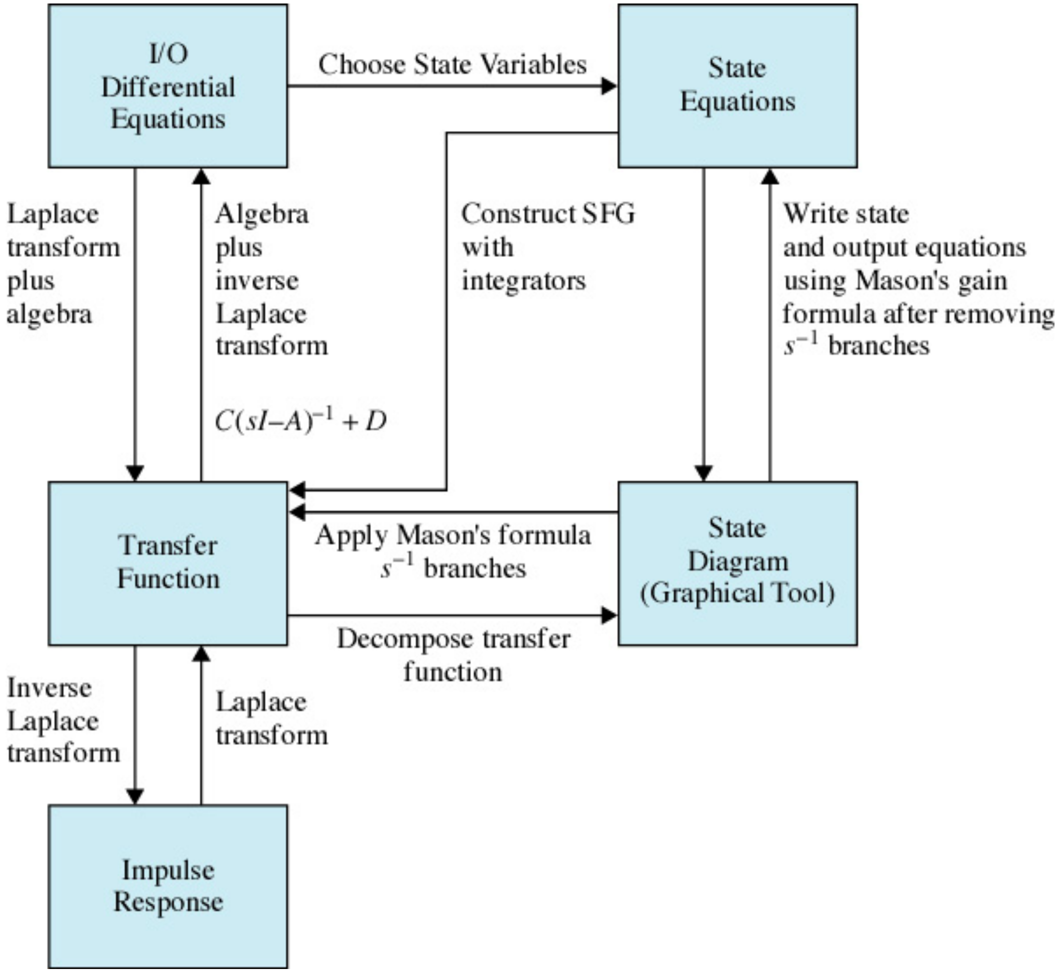
$$(\lambda_1\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 2 & -6 & 5 \\ -1 & 2 & -2 \\ -3 & -2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ p_{31} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \qquad \mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{3}{7} \\ -\frac{5}{7} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{22}{49} \\ -\frac{46}{49} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{T} = [\mathbf{p}_1 \quad \mathbf{p}_2 \quad \mathbf{p}_3] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -\frac{3}{7} & -\frac{22}{49} \\ -2 & -\frac{5}{7} & -\frac{46}{49} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

8-11 전달함수의 분해

- 직접분해
  - CCF로의 직접분해
  - OCF로의 직접분해
- 종속분해
- 병렬분해



직접분해 – CCF로의 직접분해

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + b_{b-2}s^{n-2} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

- 분모차수는 분자차수보다 한차수 이상 크다고 가정

1. 전달함수를 s의 음의 멱급수로 표현한다. 이는 전달함수의 분모와 분자에 s^{-n}을 곱해서 얻는다.
2. 전달함수의 분모 및 분자에 의사변수 $X(s)$를 곱한다. 이 두 수순을 식 (5-190)에 적용하면

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_{n-1}s^{-1} + b_{n-2}s^{-2} + \cdots + b_1 s^{-n+1} + b_0 s^{-n}}{1 + a_{n-1}s^{-1} + \cdots + a_1 s^{-n+1} + a_0 s^{-n}} \frac{X(s)}{X(s)} \qquad (5\text{-}191)$$

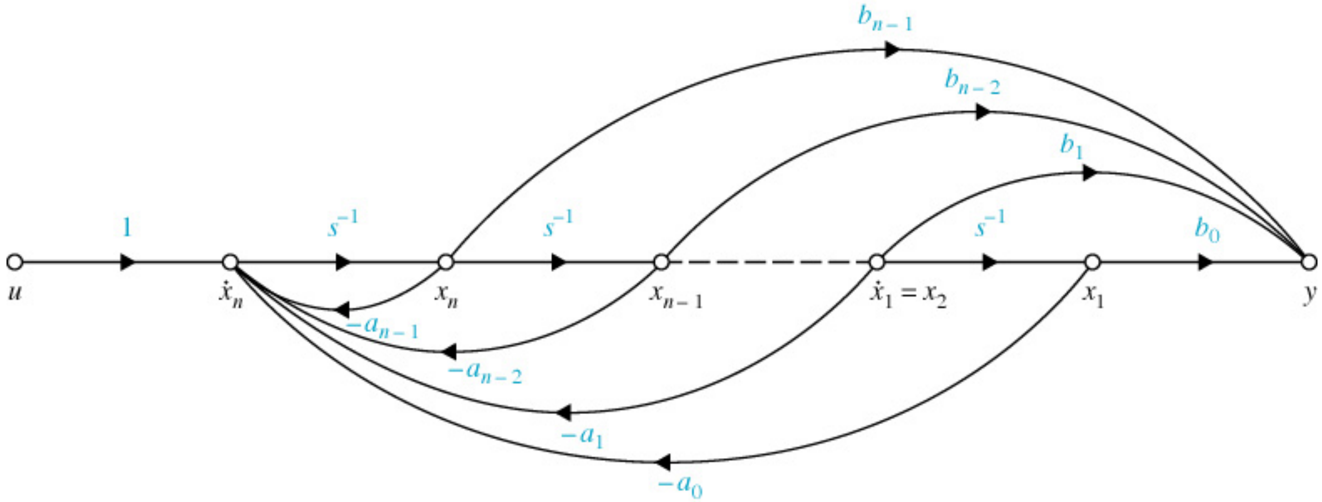
3. 식 (5-191)의 양변에 있는 분자 및 분모를 각각 서로 같게 놓는다. 그 결과는

$$Y(s) = (b_{n-1}s^{-1} + b_{n-2}s^{-2} + \cdots + b_1 s^{-n+1} + b_0 s^{-n})\,X(s) \quad (5\text{-}192)$$

$$U(s) = (1 + a_{n-1}s^{-1} + \cdots + a_1 s^{-n+1} + a_0 s^{-n})\,X(s) \quad (5\text{-}193)$$

4. 식 (5-192)와 식 (5-193)에 있는 두 방정식을 이용하여 상태선도를 구성하려면 먼저 적절한 원인-결과 관계를 이루어야 한다. 식 (5-192)는 이미 이와 같은 전제 조건을 만족시키는 것이 분명하다. 그러나 식 (5-193)은 입력이 방정식 왼쪽에 존재하고 있으므로 정리하지 않으면 안 된다. 식 (5-193)은 다음과 같이 정리된다.

$$X(s) = U(s) - (a_{n-1}s^{-1} + a_{n-2}s^{-2} + \cdots + a_1 s^{-n+1} + a_0 s^{-n})X(s) \quad (5\text{-}194)$$



$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t)$$

$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + Du(t)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-2} & b_{n-1} \end{bmatrix} \qquad D = 0$$

경희대학교
Kyung Hee University

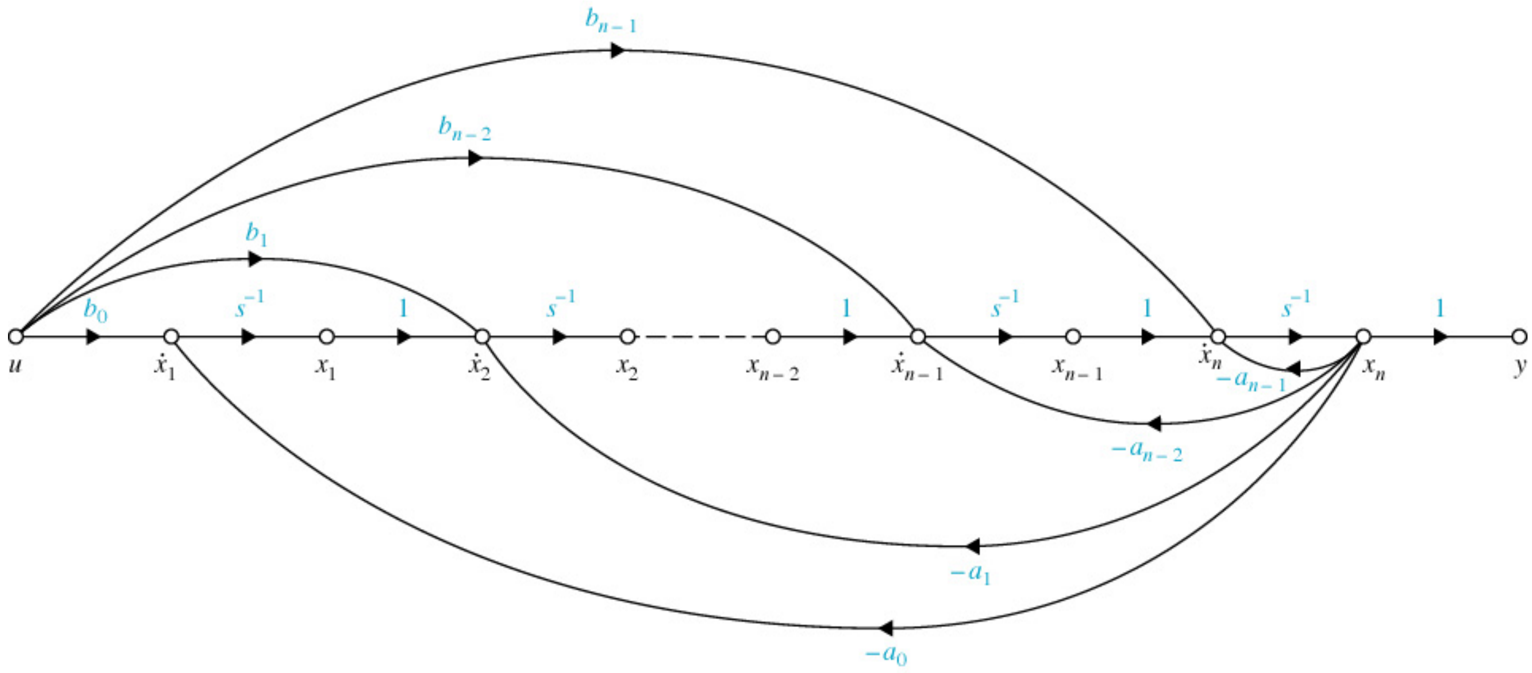
직접분해 – OCF로의 직접분해

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + b_{b-2}s^{n-2} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

- 분모차수는 분자차수보다 한차수 이상 크다고 가정

$$(1 + a_{n-1}s^{-1} + \cdots + a_1 s^{-n+1} + a_0 s^{-n})Y(s) = (b_{n-1}s^{-1} + b_{n-2}s^{-2} + \cdots + b_1 s^{-n+1} + b_0 s^{-n})U(s) \quad (5\text{-}199)$$

$$Y(s) = -(a_{n-1}s^{-1} + \cdots + a_1 s^{-n+1} + a_0 s^{-n})Y(s) + (b_{n-1}s^{-1} + b_{n-2}s^{-2} + \cdots + b_1 s^{-n+1} + b_0 s^{-n})U(s) \quad (5\text{-}200)$$



$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

예제 8-11-1

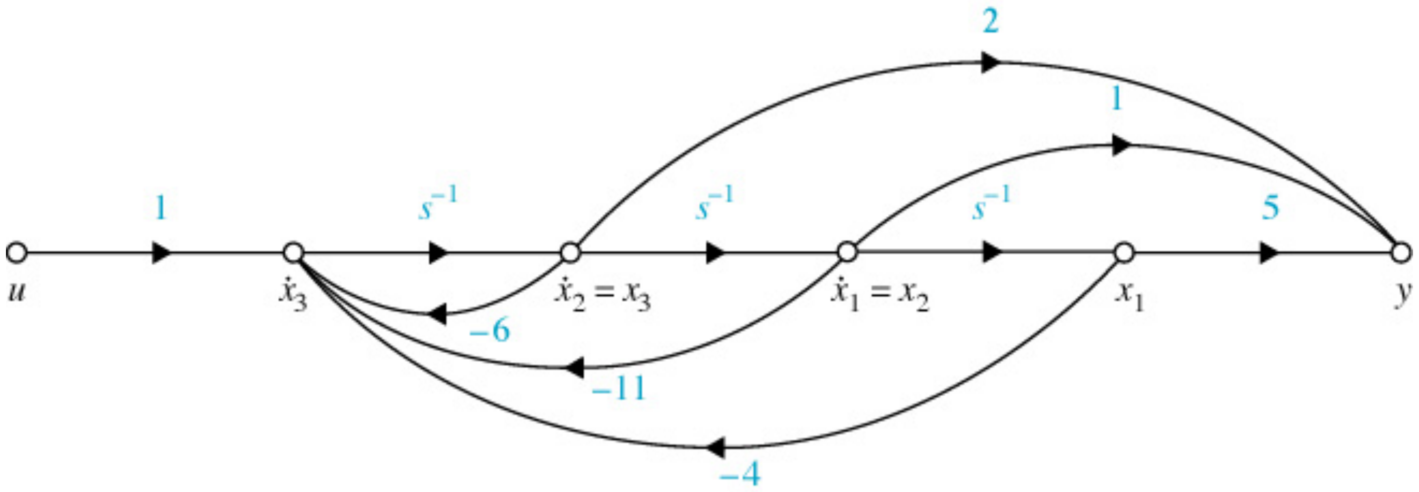
$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2s^2 + s + 5}{s^3 + 6s^2 + 11s + 4}$$

이 시스템의 CCF 상태선도는

$$Y(s) = (2s^{-1} + s^{-2} + 5s^{-3})X(s)$$
$$X(s) = U(s) - (6s^{-1} + 11s^{-2} + 4s^{-3})X(s)$$

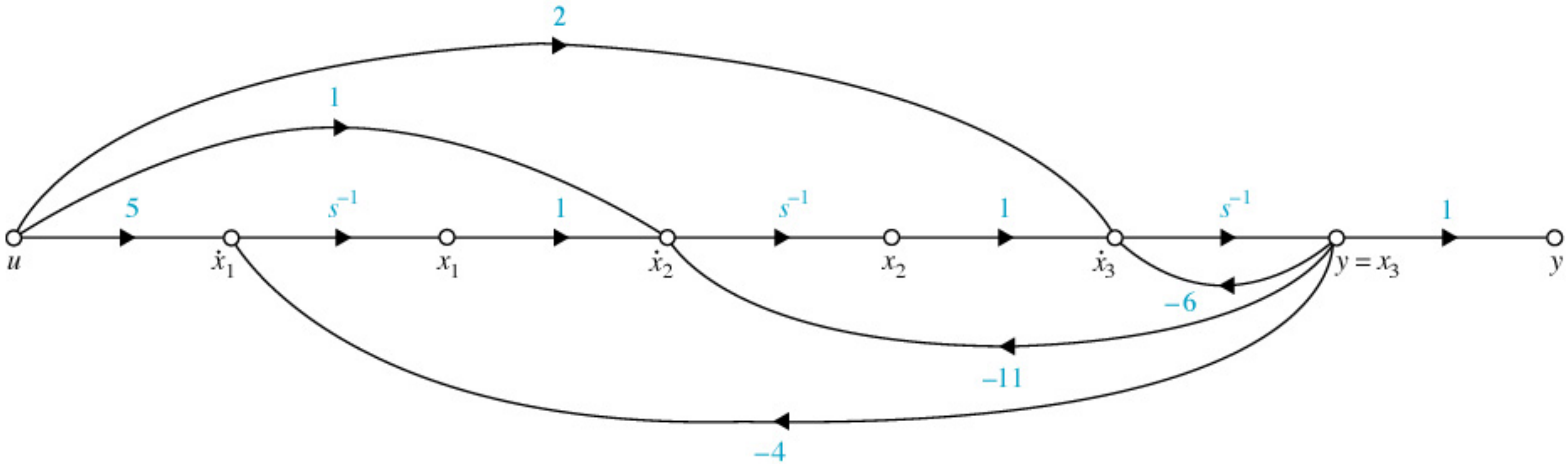
$$\begin{bmatrix} \dfrac{dx_1(t)}{dt} \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} \\ \dfrac{dx_3(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [5 \quad 1 \quad 2]\mathbf{x}(t)$$



OCF 상태선도

$$Y(s) = (2s^{-1} + s^{-2} + 5s^{-3})U(s) - (6s^{-1} + 11s^{-2} + 4s^{-3})Y(s)$$



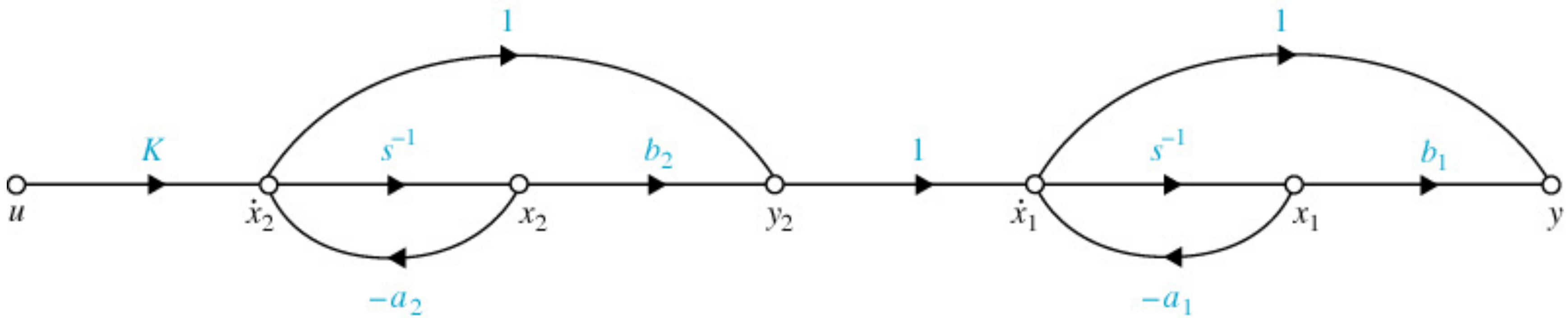
$$\begin{bmatrix} \dfrac{dx_1(t)}{dt} \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} \\ \dfrac{dx_3(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

종속분해(Cascade Decomposition)

- 간단한 1차 또는 2차 요소의 곱으로 표기된 전달함수

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = K\left(\frac{s+b_1}{s+a_1}\right)\left(\frac{s+b_2}{s+a_2}\right)$$

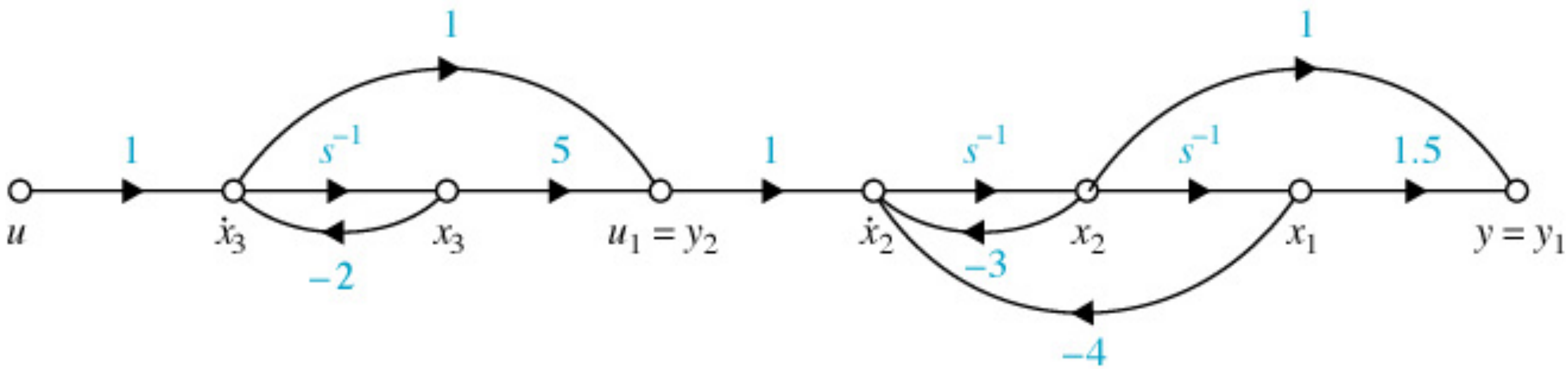


$$\begin{bmatrix} \dfrac{dx_1(t)}{dt} \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & b_2 - a_2 \\ 0 & -a_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K \\ K \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [b_1 - a_1 \quad b_2 - a_2]\mathbf{x}(t) + Ku(t)$$

Example

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \left(\frac{s+5}{s+2}\right)\left(\frac{s+1.5}{s^2+3s+4}\right)$$



$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1(t)}{dt} \\ \frac{dx_2(t)}{dt} \\ \frac{dx_3(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

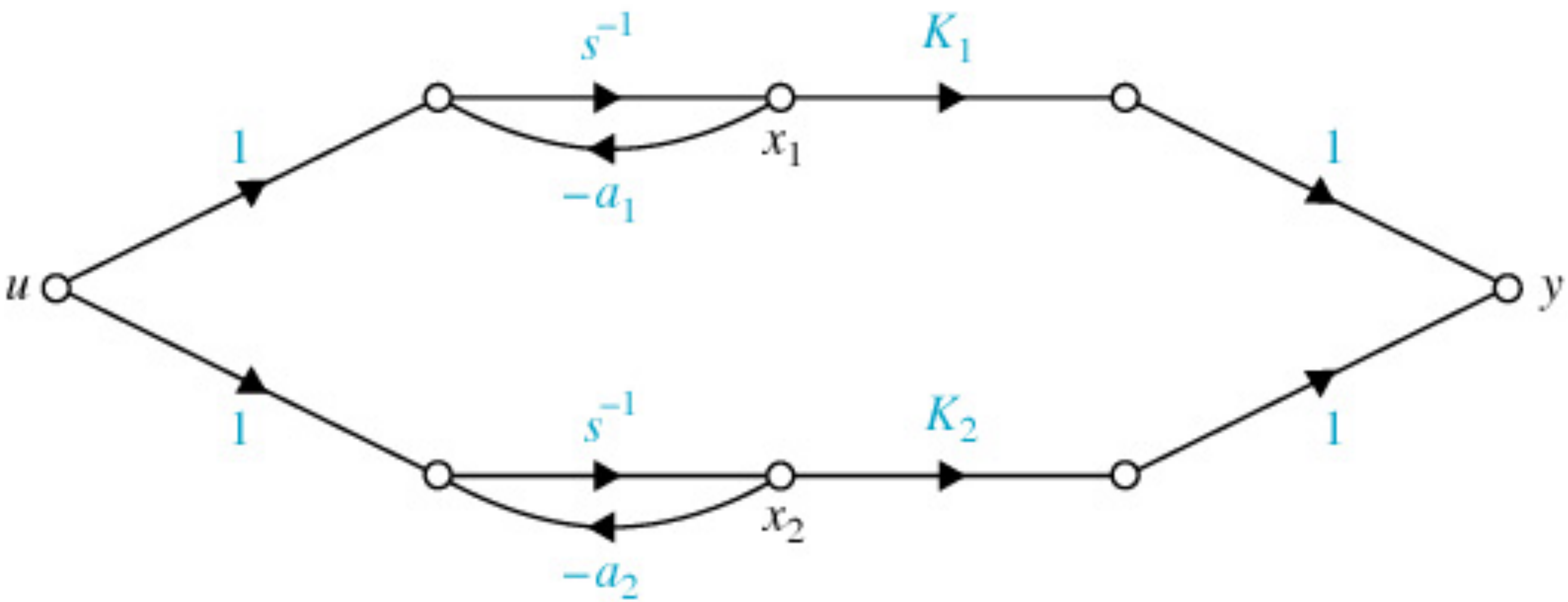
$$y(t) = [1.5 \quad 1 \quad 0]\mathbf{x}(t)$$

병렬분해(parallel Decomposition)

- 전달함수를 부분분수전개 → 단순 1차 또는 2차 시스템의 병렬연결

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{Q(s)}{(s+a_1)(s+a_2)}$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K_1}{s+a_1} + \frac{K_2}{s+a_2}$$



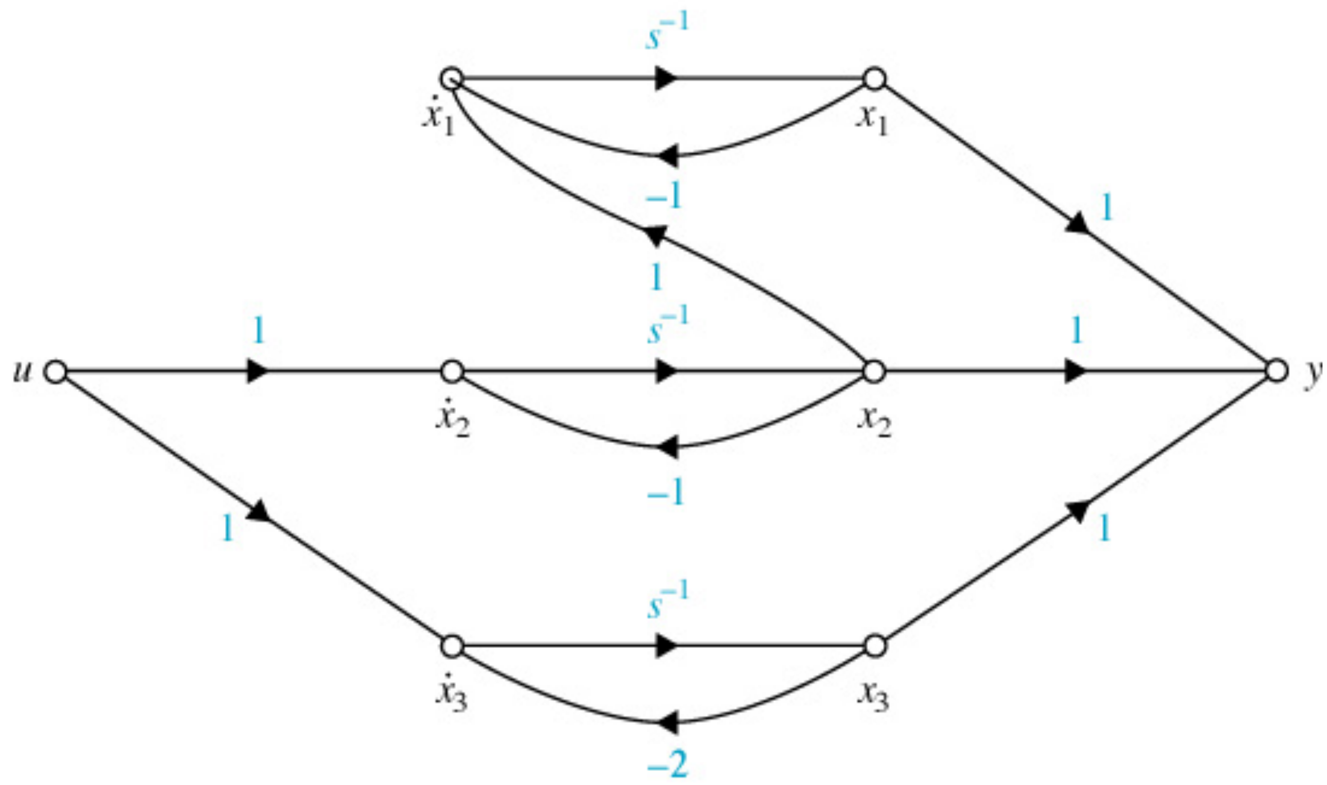
$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1(t)}{dt} \\ \frac{dx_2(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & 0 \\ 0 & -a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [K_1 \quad K_2]\mathbf{x}(t)$$

- 상태방정식은 DCF (대각선표준형)

예제 8-11-2

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2s^2 + 6s + 5}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2}$$



- 전체 차수는 4차이지만, 3개의 적분기만으로 상태선도 표현 → 한 개의 적분기가 두 채널에 공동으로 사용

$$\begin{bmatrix} \dfrac{dx_1(t)}{dt} \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} \\ \dfrac{dx_3(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

- 상태방정식은 Jordan 표준형

제어시스템의 가제어성(controllability)

- 가제어성: 고유치를 임의로 택할 수 있도록 하는 피드백해의 존재에 관계
- 가관측성: 측정할 수 있는 출력변수로부터 상태변수를 예측하거나 관측하는 조건에 관계

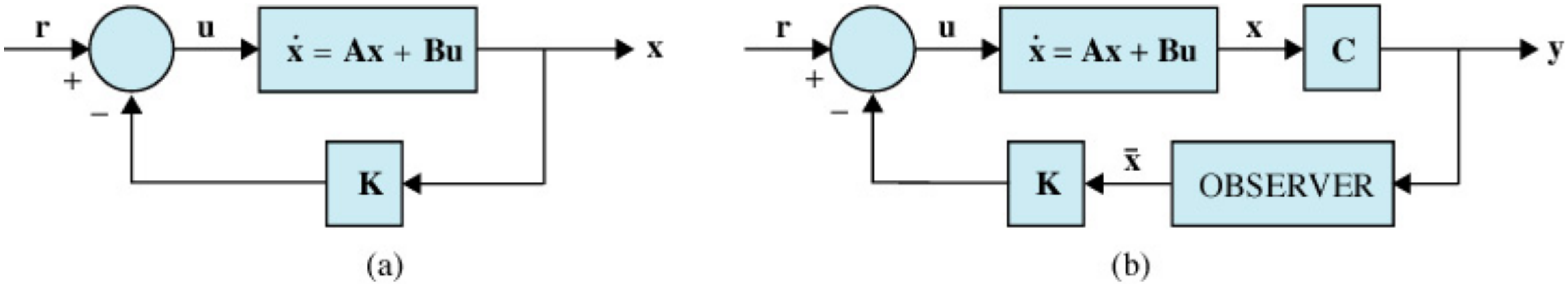


Figure 8-16 (a) Control system with state feedback.
(b) Control system with observer and state feedback.

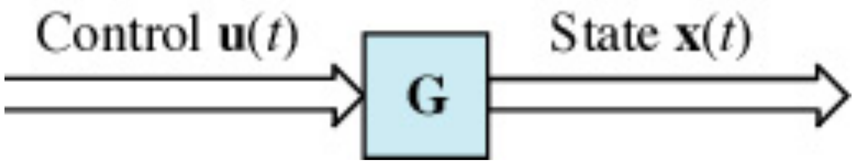
$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{Ax}(t) + \mathbf{Bu}(\mathbf{t}) \qquad \mathbf{u}(t) = -\mathbf{Kx}(t) + \mathbf{r}(t)$$

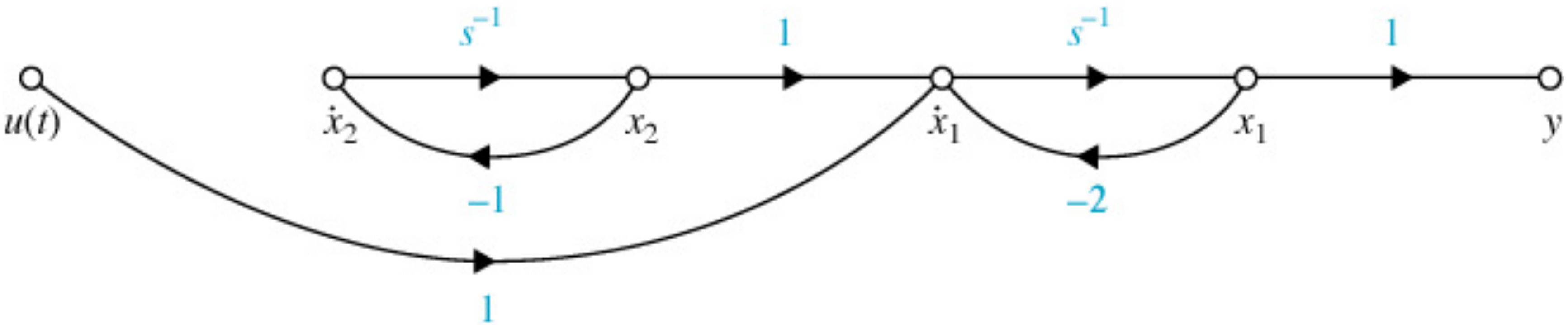
$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x}(t) + \mathbf{Br}(t)$$

- 설계목적: **A-BK** 또는 폐루프시스템의 고유치가 미리 정한 어떤 값이 되도록 피드백행렬 **K**를 구하는 것
- 가제어성: **A-BK**의 고유치를 임의로 배정시킬 수 있는 정수 피드백행렬 **K**가 존재하는 것

- 상태피드백 제어 실행 시 문제점
  - 상태변수 모두 감지하는데 비용이 많이듬
  - 상태변수 모두가 물리적으로 관측되지 않음

  → 관측기 설계
- 시스템에서 관측기가 설계될 수 있는 조건 → 시스템의 가관측성
- 완전가제어(completely controllable): 모든 상태변수가 임의의 속박되지 않은 제어 $u(t)$로 유한시간 내에 일정 목적값에 도달할 수 있도록 제어가능 할 경우





- 상태가제어성, 출력가제어성

상태가제어성의 정의

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

유한시간 $(t_f - t_0) \geq 0$ 동안 임의의 최종상태 $\mathbf{x}(t_f)$로 상태를 구동시키는 구간 연속입력(piecewise continuous input) $\mathbf{u}(t)$가 존재할 때 상태 $\mathbf{x}(t)$를 $t = t_0$에서 제어될 수 있다고 한다. 만일 시스템의 모든 상태 $\mathbf{x}(t_0)$가 유한시간 구간에 제어될 수 있다면 이런 시스템을 완전상태가제어라 하거나 또는 간단히 가제어라 한다.

상태가제어성 검사방법

Theorem 8-1. 식 *(8-261)* 상태방정식으로 표기된 시스템이 **완전한 상태가제어**가 되기 위한 필요충분조건은 다음의 $n \times nr$ **가제어성 행렬**이 n인 계수를 갖는 것이다.

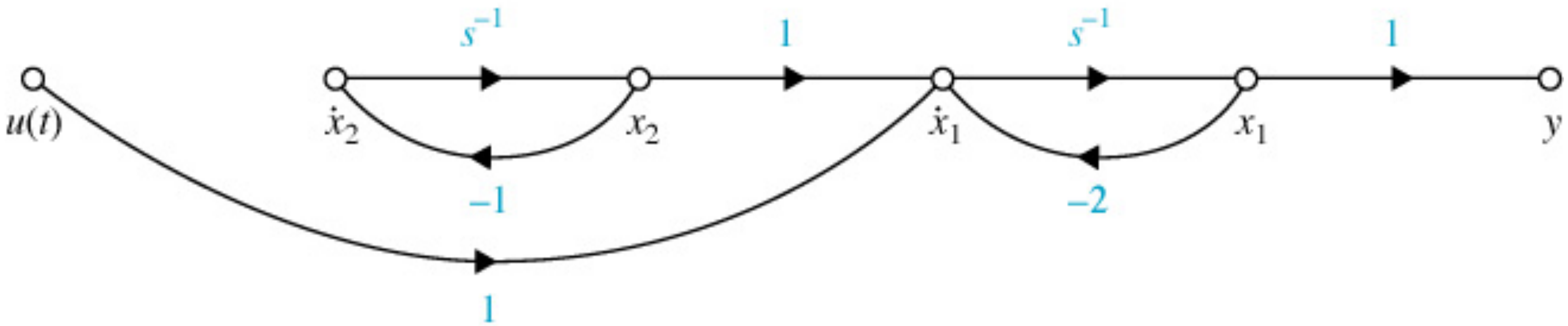
$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix}$$

행렬 $\mathbf{A}$와 $\mathbf{B}$가 포함되므로 때로는 $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$쌍이 제어될 수 있는 것은 $\mathbf{S}$가 n인 계수를 갖는 것을 말한다.

Theorem 8-2. 식 *(8-261)*의 상태방정식으로 표기된 SISO 시스템에 대해 만일 $\mathbf{A}$와 $\mathbf{B}$가 CCF이거나 또는 상사변환에 의해서 CCF로 변환시킬 수 있다면 $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$쌍은 완전가제어이다.

Theorem 8-3. 식 *(8-261)* 상태방정식으로 표기된 시스템에 대해서 $\mathbf{A}$가 DCF나 JCF인 형태이고 모든 Jordan 블록의 마지막 행에 대응하는 $\mathbf{B}$의 행의 모든 요소가 정칙이라면 $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$쌍은 완전가제어이다.

Example 8-12-2



$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB}] = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

비정칙이며 이 시스템은 비가제어이다.

Example 8-12-3

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & -4 & 3\end{bmatrix} \qquad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S}=[\mathbf{B}\quad \mathbf{AB}\quad \mathbf{A}^2\mathbf{B}]=\begin{bmatrix}0 & -1 & -4\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 3 & 8\end{bmatrix}$$

비정칙이다. 그러므로 이 시스템은 제어될 수 없다.

$\mathbf{A}$의 고유치는 $\lambda_1=2$, $\lambda_2=2$, 그리고 $\lambda_3=1$이다.

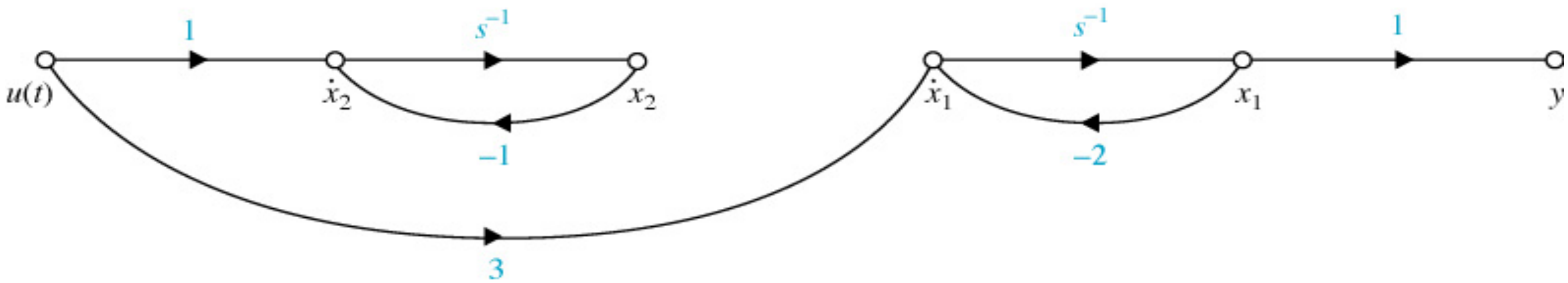
$\mathbf{A}$와 $\mathbf{B}$의 JCF는 변환 $\mathbf{x}(t)=\mathbf{T}\overline{\mathbf{x}}(t)$로 구한다.

$$\mathbf{T}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 2\end{bmatrix} \qquad \overline{\mathbf{A}}=\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \qquad \overline{\mathbf{B}}=\mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}=\begin{bmatrix}0\\ -1\\ 0\end{bmatrix}$$

$\overline{\mathbf{B}}$의 마지막 행이 영이기 때문에 상태변수 $\overline{\mathbf{x}}_3(t)$는 제어될 수 없다.

가관측성

동적방정식으로 표현된 주어진 선형시불변시스템에서 만일 주어진 임의의 입력에 대해서 $t_0 \le t < t_f$에서 $\mathbf{u}(t)$의 정보와 행렬 $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$, 그리고 $t_0 \le t < t_f$에서 출력 $\mathbf{y}(t)$들이 $\mathbf{x}(t_0)$를 결정짓는 데 충분한 유한시간 $t_f \ge t_0$가 존재할 때 상태 $\mathbf{x}(t_0)$를 관측할 수 있다고 한다. 만일 유한시간 t_f동안 시스템의 모든 상태를 관측할 수 있다면 이러한 시스템을 완전가관측 시스템 또는 간단히 가관측이라고 한다.



- 가관측성 검사법

Theorem 8-4. 식 (8-261)과 식 (8-262)로 표현된 시스템이 완전한 가관측성이 되기 위해서는 다음의 $np \times n$ 인 **가관측성 행렬**이 n 인 계수를 갖는 것이 필요충분조건이다.

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix} \tag{5-237}$$

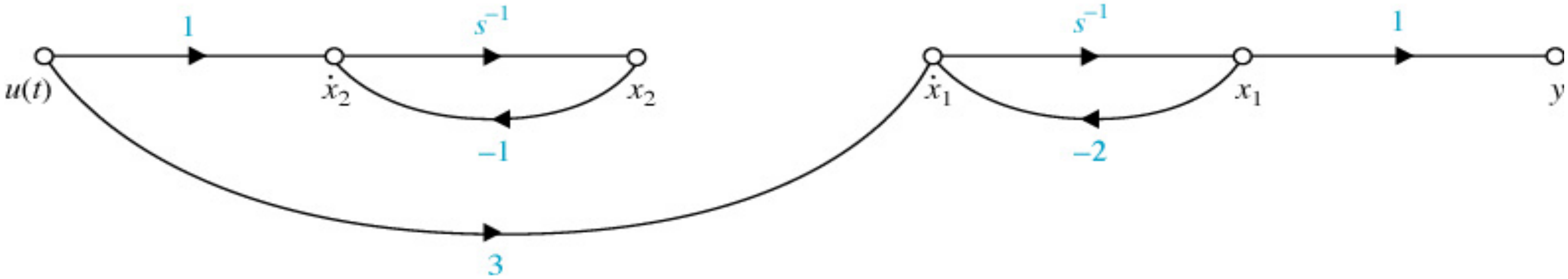
이 조건은 또 [**A**, **C**]쌍이 가관측이 되는 것에도 역시 관련된다. 실제로 시스템이 오직 한 개의 출력을 갖는다면 **C**는 $1 \times n$ 인 행만의 행렬이고 **V**는 $n \times n$ 인 정방행렬이다. 이때 이 시스템은 만일 **V**가 정칙이면, 완전한 가관측이다.

경희대학교
Kyung Hee University

Theorem 8-5. 동적방정식 *(8-261)* 과 *(8-262)*로 표현된 SISO 시스템에서 만일 **A** 와 **C** 가 OCF 이거나 또는 상사변환에 의해서 OCF 로 변환될 수 있다면 [**A**, **C**]는 완전한 가관측성이다.

Theorem 8-6. 동적방정식 *(8-261)* 과 *(8-262)*로 표현된 시스템에 대해서 **A** 가 DCF 나 JCF 라면 모든 Jordan 블록의 첫 번째 열에 대응하는 **C** 의 열의 모든 요소가 영이 아닌 경우 [**A**, **C**]쌍은 완전한 가관측이다.

Example 8-13-1



$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

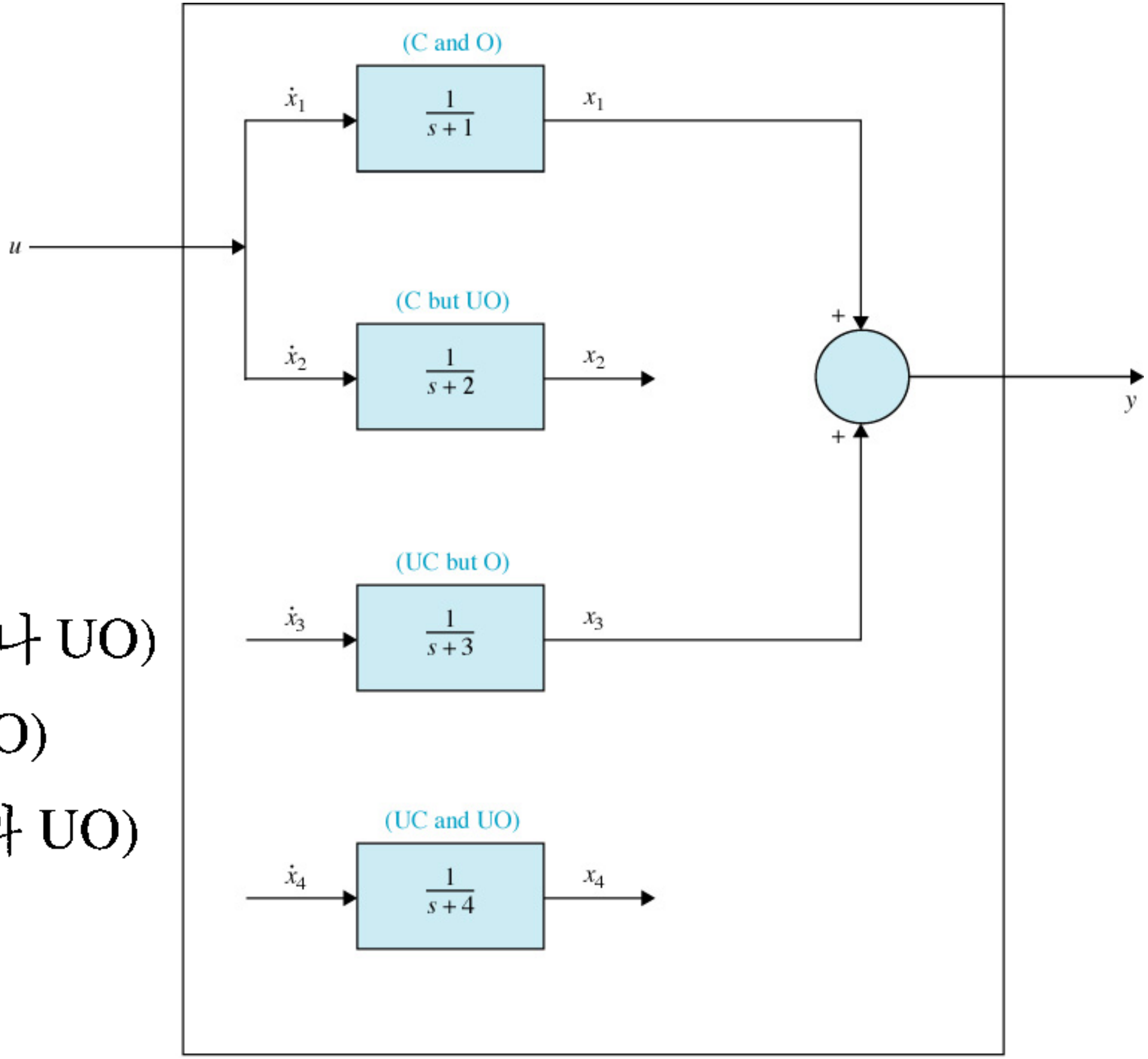
$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

비정칙이다. 그러므로 **[A, C]**쌍은 비가관측성이다.

가제어성, 가관측성과 전달함수 사이의 관계

Theorem 8-7. 선형시스템의 입출력 전달함수가 만일 극-영점 상쇄를 갖는다면, 이 시스템은 상태변수의 정의에 따라서는 비가제어성이거나 비가관측성 혹은 이 두 가지 경우 모두에 해당될 수 있다. 다시 말해, 입출력 전달함수가 극-영점 상쇄를 갖지 않는다면, 이 시스템은 항상 완전제어와 관측시스템인 동적방정식으로 표현할 수 있다.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D = 0$$



x_1: 가제어와 가관측(C 와 O)

x_2: 가제어와 비가관측(C 그러나 UO)

x_3: 비가제어와 가관측(UC 와 O)

x_4: 비가제어와 비가관측(UC 와 UO)

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s+1}$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \frac{(s+2)(s+3)(s+4)}{(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)}$$

경희대학교
Kyung Hee University

Example 8-14-1

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+2}{(s+1)(s+2)}$$

CCF:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

CCF의 [**A**, **B**]쌍은 가제어성

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$

CCF의 [**A**, **C**]쌍은 비가관측

OCF:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

OCF의 [**A**, **C**]쌍은 가관측

$$\mathbf{S} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB}] = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

OCF의 [**A**, **B**]쌍은 비가제어성

시스템의 가제어성과 가관측성은 상태변수를 어떻게 정의하는가

가제어성과 가관측성에 관한 불변정리

Theorem 8-8. 상사변환에 관한 불변정리: 식 *(8-261) and (8-262)*. 동적방정식으로 표현되는 시스템을 생각하자. $\mathbf{P}$가 정칙인 상사변환 $\mathbf{x}(t)=\mathbf{P}\overline{\mathbf{x}}(t)$는 동적방정식을

$$\frac{d\overline{\mathbf{x}}(t)}{dt} = \overline{\mathbf{A}}\overline{\mathbf{x}}(t) + \overline{\mathbf{B}}\mathbf{u}(t) \tag{5-248}$$

$$\mathbf{y}(t) = \overline{\mathbf{C}}\mathbf{x}(t) + \overline{\mathbf{D}}\mathbf{u}(t) \tag{5-249}$$

로 변환시킨다. 여기서

$$\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} \qquad \overline{\mathbf{B}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B} \tag{5-250}$$

$[\overline{\mathbf{A}}, \overline{\mathbf{B}}]$의 가제어성과 $[\overline{\mathbf{A}}, \overline{\mathbf{C}}]$의 가관측성은 변환으로 인한 영향을 받지 않는다.

Theorem 8-9. 상태피드백을 갖는 폐루프시스템의 가제어성에 관한 정리: 만일 개루프 시스템

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \tag{5-251}$$

이 완전 가제어시스템이면, 상태피드백에 의하여

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{r}(t) - \mathbf{K}\mathbf{x}(t) \tag{5-252}$$

상태방정식은

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{r}(t) \tag{5-253}$$

이며 역시 완전 가제어시스템이다. 반면에 만일 $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$가 비가제어이면, $[\mathbf{A}-\mathbf{B}\mathbf{K}, \mathbf{B}]$인 쌍을 가제어성으로 만들 $\mathbf{K}$가 존재하지 않는다. 다시 말해서, 만일 개루프시스템이 비가제어이면 상태피드백으로 가제어로 만들 수 없다.

Theorem 8-10. 상태피드백을 갖는 폐루프시스템의 가관측성에 관한 정리: 만일 개루프시스템이 가제어이고 가관측이면 식 *(8-287)* 와 같은 형태의 상태피드백은 가관측성을 잃게 할 수도 있다. 다시 말하면, 개루프와 상태피드백으로 인한 폐루프시스템의 가관측성은 관련이 없다.

- 예제 5-23

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$$

[**A**, **B**]는 가제어이고 [**A**, **C**]는 가관측임

상태피드백이 다음과 같이 정의된다고 하자.

$$u(t) = r(t) - \mathbf{Kx}(t) \qquad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}r(t)$$

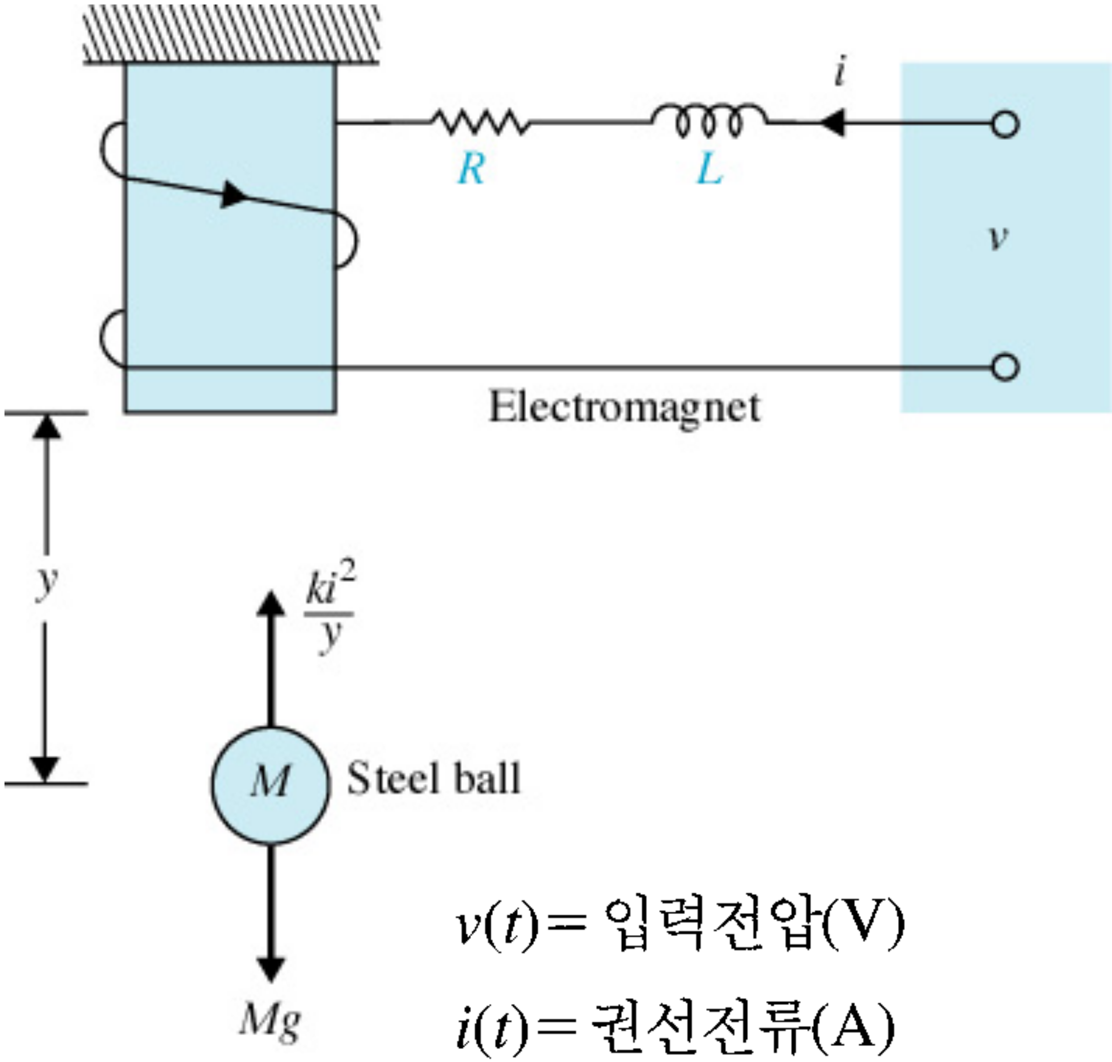
$$-\mathbf{BK} = \begin{bmatrix} -k_1 & 1 - k_2 \\ -2 - k_1 & -3 - g_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}(\mathbf{A} - \mathbf{BK}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -k_1 - 4 & -3k_2 - 5 \end{bmatrix}$$

V의 행렬식은 $|\mathbf{V}| = 6k_1 - 3k_2 + 3$

k_1과 k_2를 $|\mathbf{V}|=0$이 되도록 잡는다면 이 폐루프는 비가관측성

Case Study: Magnetic-Ball Suspension System



$$M\frac{d^2x(t)}{dt^2} = Mg - \frac{ki^2(t)}{x(t)}$$

$$v(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt}$$

$v(t)$= 입력전압(V)

$i(t)$= 권선전류(A)

R= 권선저항 = 1 Ω

M= 구의 질량 = 1.0 kg

$x(t)$= 구의 위치(m)

k= 비례상수 = 1.0

L= 권선인덕턴스 = 0.01 H

g= 중력의 가속도 = 32.2 m/sec²

$$x_1(t) = x(t)$$

$$x_2(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

$$x_3(t) = i(t)$$

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t)$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = g - \frac{k}{M}\frac{x_3^2(t)}{x_1(t)}$$

$$\frac{dx_3(t)}{dt} = -\frac{R}{L}x_3(t) + \frac{v(t)}{L}$$

$x_1(t)=x(t)=0.5$ m 평형점 부근에서 선형화

$$\Delta\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}^*\Delta\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}^*\Delta v(t)$$

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 64.4 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & -100 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B}^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \end{bmatrix}$$

특성방정식

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}^*| = \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ -64.4 & s & 16 \\ 0 & 0 & s+100 \end{vmatrix} = s^3 + 100s^2 - 64.4s - 6440 = 0$$

고유치: $\mathbf{A}^*$의 고유치 또는 특성방정식의 근은

$$s = -100 \qquad s = -8.025 \qquad s = 8.025$$

상태천이행렬: $\mathbf{A}^*$의 상태천이행렬은

$$\phi(t) = \mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A}^*)^{-1}] = \mathcal{L}^{-1}\left(\begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ -64.4 & s & 16 \\ 0 & 0 & s+100 \end{bmatrix}^{-1}\right)$$

$$\phi(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+100)(s+8.025)(s-8.025)}\begin{bmatrix} s(s+100) & s+100 & -16 \\ 64.4(s+100) & s(s+100) & -16s \\ 0 & 0 & s^2-64.4 \end{bmatrix}\right)$$

부분분수전개를 하고 역라플라스변환을 취함으로써 상태천이행렬은

$$\phi(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.0016 \\ 0 & 0 & 0.16 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} e^{-100t} + \begin{bmatrix} 0.5 & -0.062 & 0.0108 \\ -4.012 & 0.5 & -0.087 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} e^{-8.025t}$$
$$+ \begin{bmatrix} 0.5 & 0.062 & -0.0092 \\ 4.012 & 0.5 & -0.074 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} e^{8.025t}$$

식 (5-273)의 마지막 항은 양의 지수를 갖기 때문에, $\phi(t)$의 응답은 시간과 더불어 증가하고 시스템은 불안정해진다. 제어가 없기 때문에 이것은 예측된 것으로서 강철 구는 자석의 밑을 때릴 때까지 자석에 의해 끌어당겨진다.

전달함수: 강철구의 위치 $x(t)$를 출력 $y(t)$, 그리고 입력을 $v(t)$로 정의하자. 그러면 이 시스템의 입출력 전달함수는

$$\frac{Y(s)}{V(s)} = \mathbf{C}^*(s\mathbf{I} - \mathbf{A}^*)^{-1}\mathbf{B}^* = [1 \quad 0 \quad 0](s\mathbf{I} - \mathbf{A}^*)^{-1}\mathbf{B}^*$$

$$= \frac{-1600}{(s + 100)(s + 8.025)(s - 8.025)} \tag{5-274}$$

가제어성: 가제어성 행렬은

$$\mathbf{S} = [\mathbf{B}^* \quad \mathbf{A}^*\mathbf{B}^* \quad \mathbf{A}^{*2}\mathbf{B}^*] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1{,}600 \\ 0 & -1{,}600 & 160{,}000 \\ 100 & -10{,}000 & 1{,}000{,}000 \end{bmatrix}$$

S의 계수가 3이므로 이 시스템은 완전한 가제어시스템이다.

경희대학교
Kyung Hee University

가관측성: 이 시스템의 가관측성은 출력에서 정의된 변수에 의존한다. 상태피드백제어(10장에서 논함)가 되기 위해 전체 제어기는 모두 3개의 상태변수 x_1, x_2와 x_3가 피드백되는 것이 필요하다. 그러나 경제적인 이유 때문에, 3개의 상태변수 중 오직 한 개만 피드백시키는 것을 바란다. 이 문제를 더 일반화하기 위해 출력으로 선택된 어느 상태가 비가관측성으로 되는가를 조사한다.

1. $y(t)=$ 강철구의 위치 $=x(t)$: $\mathbf{C}^*=[\,1\;0\;0\,]$

가관측성 행렬은

$$\mathbf{V}=\begin{bmatrix}\mathbf{C}^*\\ \mathbf{C}^*\mathbf{A}^*\\ \mathbf{C}^*\mathbf{A}^{*2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 64.4 & 0 & -16\end{bmatrix} \tag{5-276}$$

로서 계수가 3이다. 그러므로 이 시스템은 완전한 가관측시스템이다.

2. $y(t)$= 구의 속도 $=dx(t)/dt$: $\mathbf{C}^* = [\,0\ 1\ 0\,]$

가관측성 행렬은

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^* \\ \mathbf{C}^*\mathbf{A}^* \\ \mathbf{C}^*\mathbf{A}^{*2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 64.4 & 0 & -16 \\ 0 & 64.4 & 1600 \end{bmatrix} \tag{5-277}$$

로서 계수가 3 이다. 그러므로 이 시스템은 완전한 가관측시스템이다.

3. $y(t)$= 권선전류 $=i(t)$: $\mathbf{C}^* = [\,0\ 0\ 1\,]$

가관측성 행렬은

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^* \\ \mathbf{C}^*\mathbf{A}^* \\ \mathbf{C}^*\mathbf{A}^{*2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -100 \\ 0 & 0 & -10{,}000 \end{bmatrix} \tag{5-278}$$

로서 계수가 1 이다. 그러므로 이 시스템은 비가관측이 된다. 이 결과의 물리적 해석은 만일 전류 $i(t)$를 측정할 수 있는 출력으로 잡는다면 측정된 정보로부터 상태변수를 다시 구성할 수는 없음을 의미한다.

State-Feedback Control

- 최근에는 Forward나 feedback에 고정된 구조의 제어기를 사용하기 보다는 실수 상수 gain을 이용해서 상태변수를 feedback하는 state-feedback control 기법을 많이 사용함.

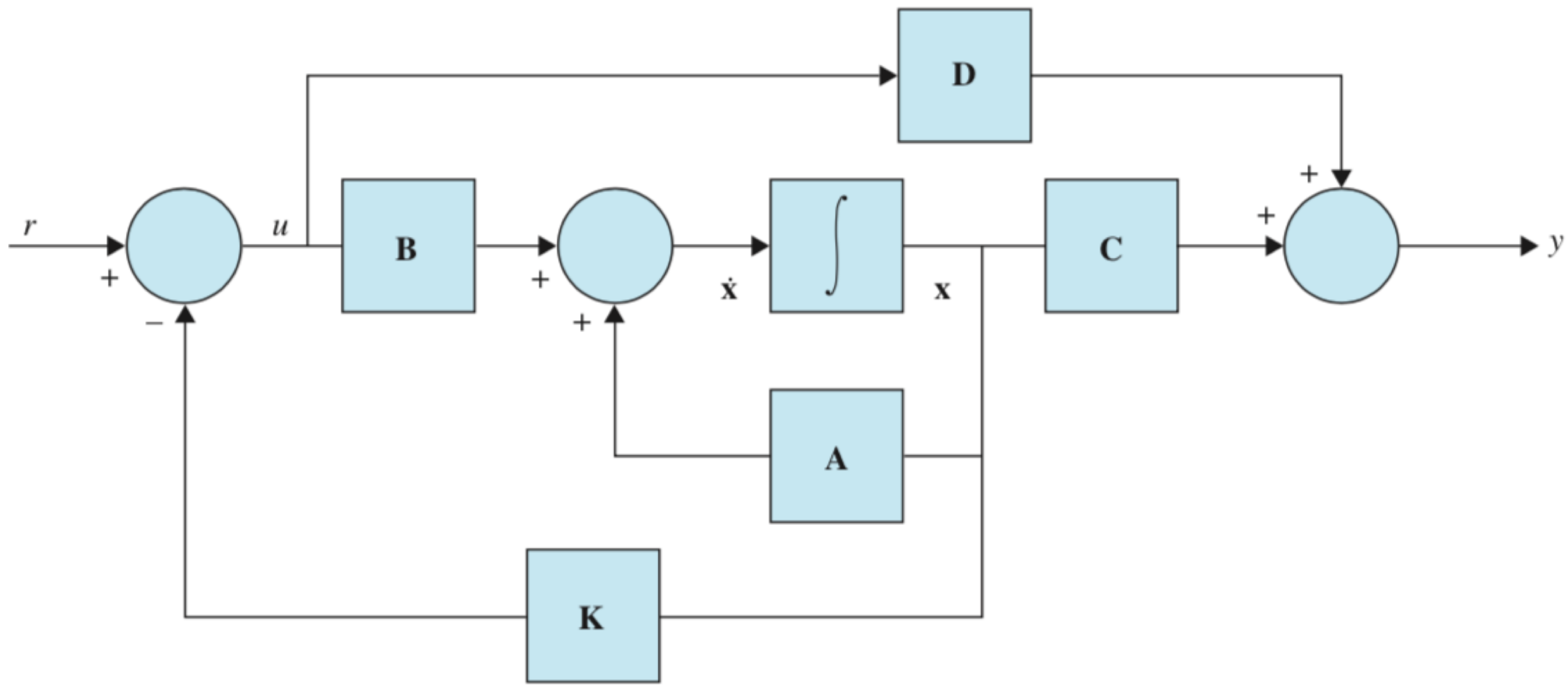


Figure 8-22 Block diagram of a control system with state feedback.

State-Feedback Control

- State feedback을 가지는 시스템의 일반적인 전달함수는

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + (2\zeta\omega_n + K_2)s + K_1}$$

- 기존의 다른 시스템들과 비교해보면,

비슷함

if $k_1 = \omega_n^2$ and $k_2 = K_t\omega_n^2$

Tachometer feedback:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + \left(2\zeta\omega_n + K_t\omega_n^2\right)s + \omega_n^2}$$

PD control:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2(K_P + K_D s)}{s^2 + \left(2\zeta\omega + K_D\omega_n^2\right)s + \omega_n^2 K_P}$$

State-Feedback Control

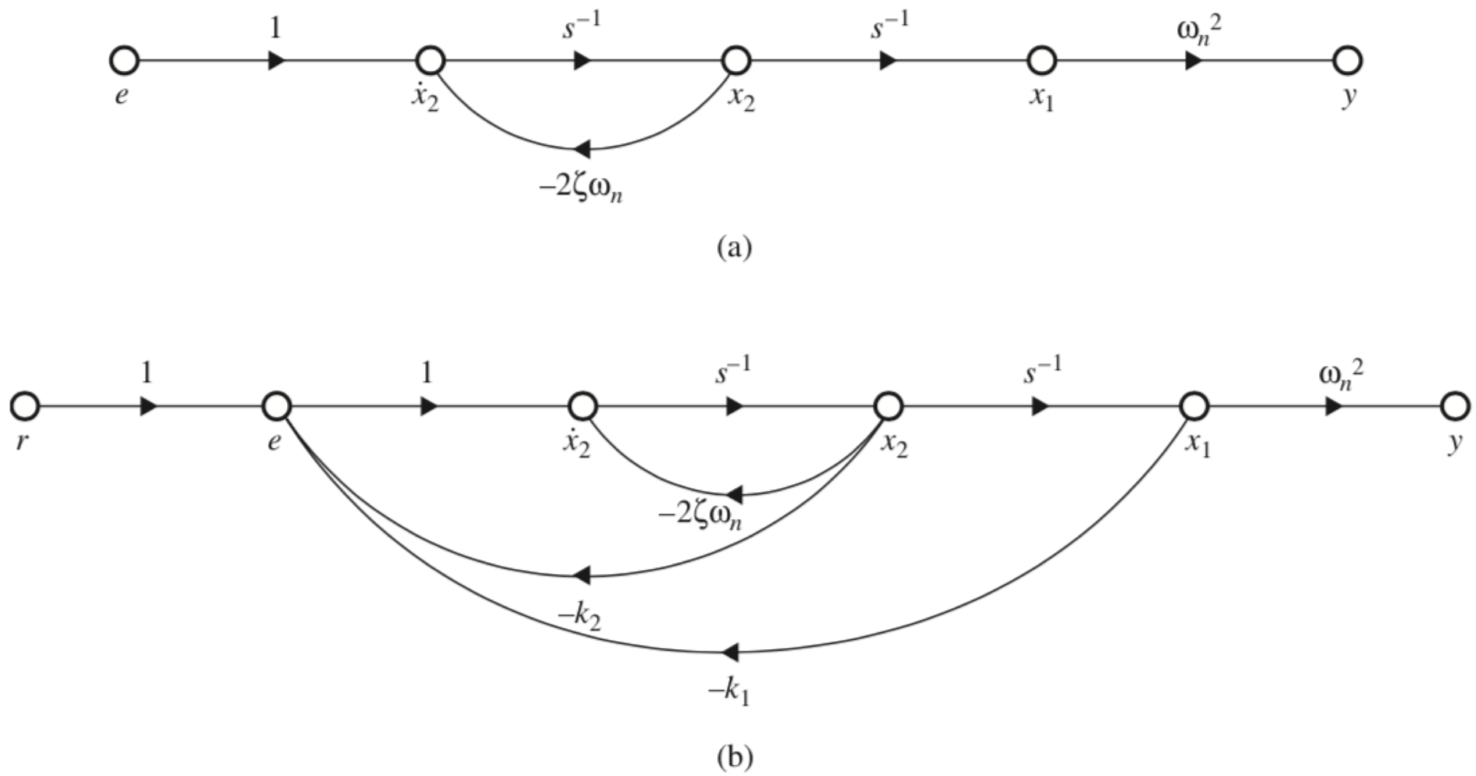


Figure 8-23 Control of a second-order system by state feedback.

- The systems with zero reference input, $r(t) = 0$, are commonly known as **regulators**. When $r(t) = 0$, then a second-order system with PD control is the same as state-feedback control.

Pole-Placement through State-Feedback Control

- 3차 또는 그 이상의 공정에서는 PD, PI, 1단 진상 또는 지상제어기로는 각 제어기에 두 개의 자유 파라미터만 있기 때문에 독립적으로 시스템의 모든 극들을 제어할 수 없다.
- n차 시스템에 있어서 임의의 극배치를 위해 필요한 조건을 조사하기 위해 다음 상태 방정식으로 기술되는 공정을 고려해 보자

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

여기서 $\mathbf{x}(t)$는 $n \times 1$ 상태벡터이고 $u(t)$는 스칼라 제어량이다. 상태피드백 제어는

$$u(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) + r(t)$$

- 그러면, Closed-loop system은

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}r(t)$$

- 특성방정식은 다음과 같으며, n개의 근들을 임의의 위치에 놓을 수 있다.

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}| = 0$$

Pole-Placement through State-Feedback Control

- 만약에 완전한 가제어시스템이라면 가제어성표준형(CCF)으로 항상 표현할 수 있다는 것을 이용할 수 있으며,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

The feedback gain matrix **K** is expressed as

$$\mathbf{K} = [k_1 \quad k_2 \quad \cdots \quad k_n]$$

$$\mathbf{A} - \mathbf{BK} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 - k_1 & -a_1 - k_2 & -a_2 - k_3 & \cdots & -a_{n-1} - k_n \end{bmatrix}$$

$$|s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{BK})| = s^n + (a_{n-1} + k_n)s^{n-1} + (a_{n-2} + k_{n-1})s^{n-2} + \cdots + (a_0 + k_1) = 0$$

- 모든 항에 k가 있으므로 고유치를 임의로 할당할 수 있음.

Example 8-18-1

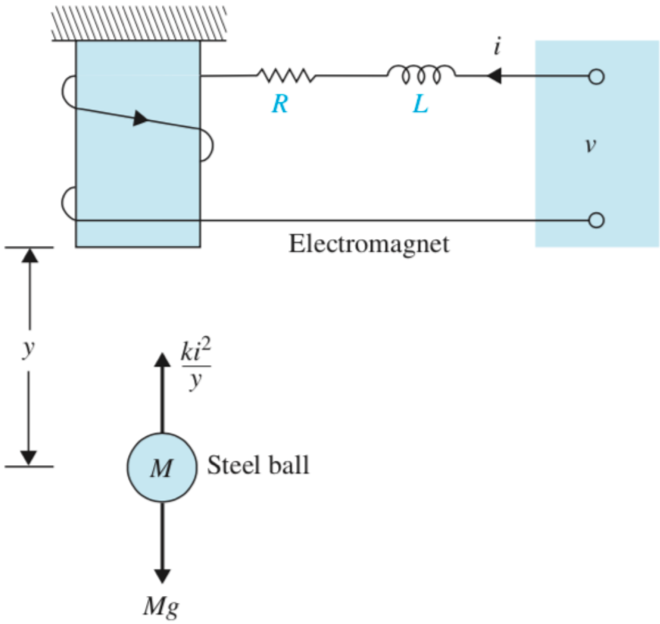


Figure 8-21 Ball-suspension system.

$$M\frac{d^2y(t)}{dt^2} = Mg - \frac{ki^2(t)}{x(t)}$$

$$v(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt}$$

$$x_1(t) = x(t)$$

$$x_2(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

$$x_3(t) = i(t)$$

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t)$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = g - \frac{k}{M}\frac{x_3^2(t)}{x_1(t)}$$

$$\frac{dx_3(t)}{dt} = -\frac{R}{L}x_3(t) + \frac{v(t)}{L}$$

- Equilibrium point $y_0(t) = x_{01} = 0.5\text{ m}$ & $x_{02}(t) = \frac{dx_{01}(t)}{dt} = 0$ and $\frac{d^2y_0(t)}{dt^2} = 0$.

the linearized equations are written

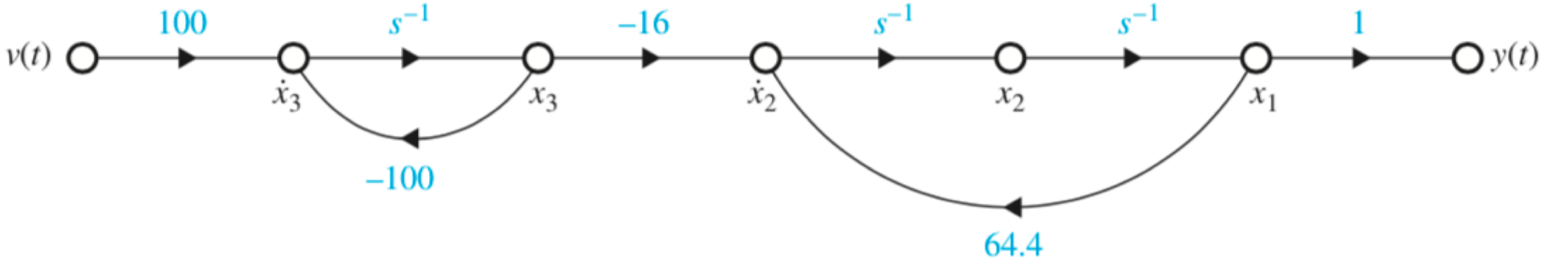
$$\Delta\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}^*\Delta\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}^*\Delta v(t) \qquad \mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 64.4 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & -100 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \end{bmatrix}$$

- 다음의 설계사양(design specification)을 고려하자.

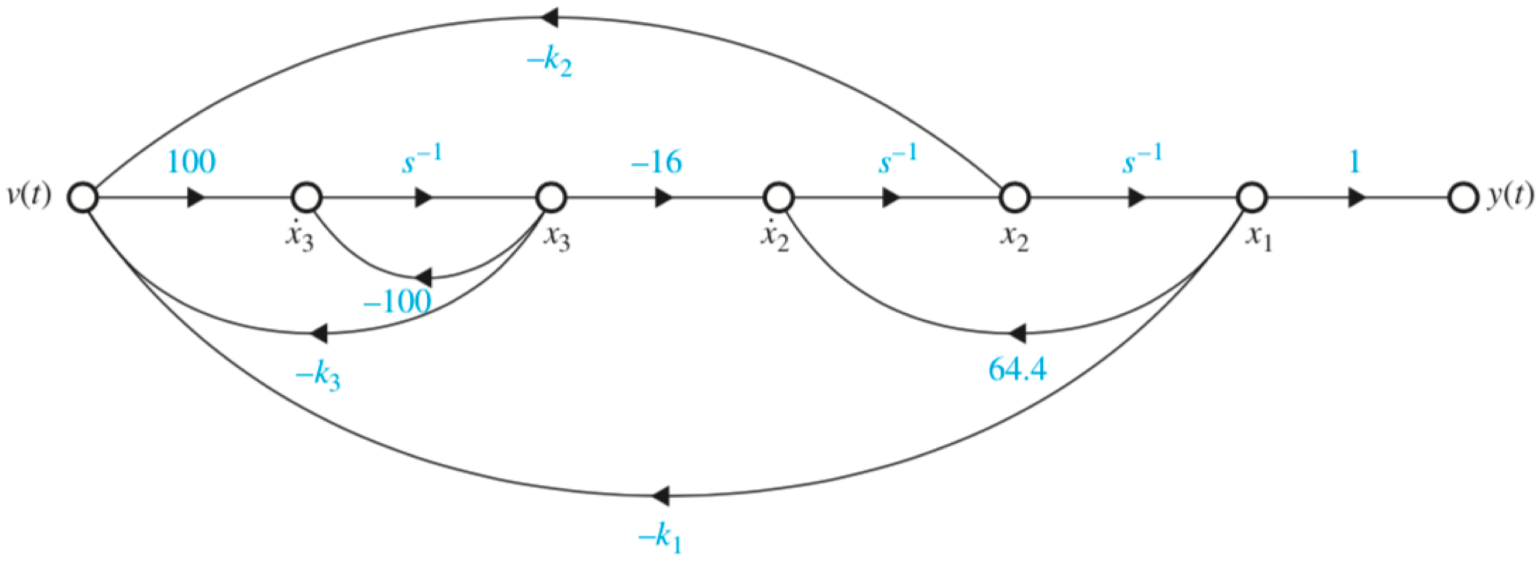
1. 시스템은 안정해야 한다.
2. 볼이 평형위치에 존재할 때 어떤 외란이 인가되더라도, 볼이 영 정상상태오차를 갖는 평형위치로 회복되어야 한다.
3. 시간응답은 0.5초 이내에 초기외란의 5% 이내로 정정되어야 한다.
4. 다음의 상태피드백에 의해 제어를 실현해야 한다.

$$\Delta v(t) = -\mathbf{K}\Delta\mathbf{x}(t) = -[k_1 \quad k_2 \quad k_3]\Delta\mathbf{x}(t)$$

- Open-loop system과 state-feedback closed-loop system의 상태선도를 그리면,



(a)



(b)

Figure 8-24 (*a*) State diagram of magnetic-ball-suspension system. (*b*) State diagram of magnetic-ball-suspension system with state feedback.

- 시간응답에 대한 세 번째 요구조건을 만족시키도록 $sI - A^* + B^*K$의 고유치를 원하는 위치에 놓아야 한다면,

1. 시스템의 동적 특성은 두 우세근에 의해 지배되어야 한다.
2. 상대적으로 빠른 응답을 얻기 위해 두 우세근을 복소수로 선정해야 한다.
3. 복소근의 실수부에 의해 결정되는 감쇠가 적절해야 하고 허수부는 과도 현상이 빠르게 소멸되도록 충분히 높아야 한다.

- MATLAB을 이용하여 trial&error로 다음의 특성방정식을 찾음.

$$s^3+32s^2+300s+1200=0 \qquad s=-20 \quad s=-6+j4.9 \quad s=-6-j4.9$$

- state-feedback closed-loop system의 특성방정식은

$$s\mathbf{I}-\mathbf{A}^*+\mathbf{B}^*\mathbf{K}=\begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ -64.4 & s & 16 \\ 100k_1 & 100k_2 & s+100+100k_3 \end{vmatrix}$$

$$=s^3+100(k_3+1)s^2-(64.4+1600k_2)s-1600k_1-6440(k_3+1)=0$$

- 계수를 비교하면,

$$100(k_3+1)=32$$
$$-64.4-1600k_2=300$$
$$-1600k_1-6440(k_3+1)=1200$$

$$\mathbf{K}=\begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2.038 & -0.22775 & -0.68 \end{bmatrix}$$

• 다음의 그림은 초기조건 **x**(0)가 아래와 같을 때의 결과임.

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

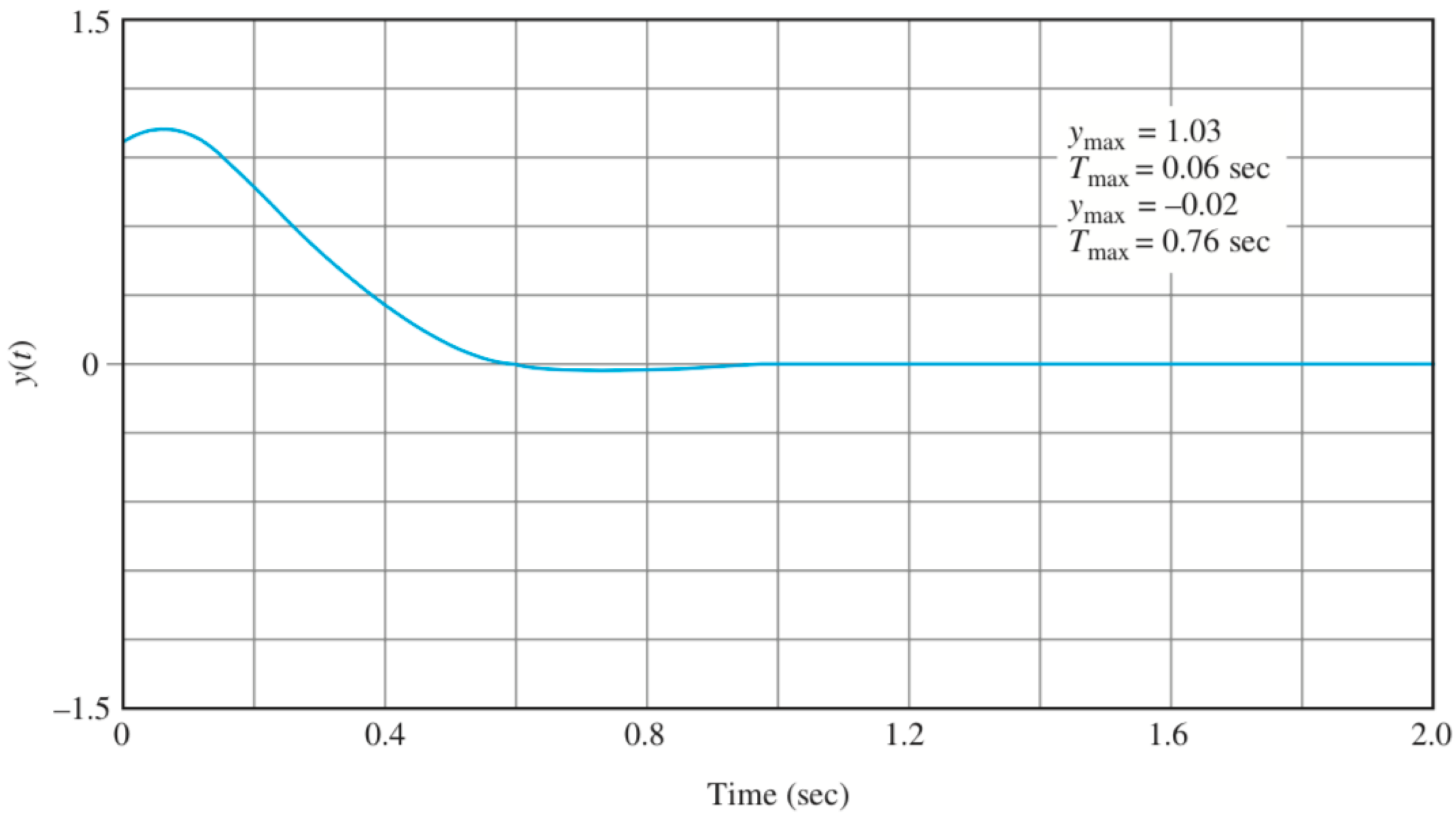


Figure 8-25 Output response of magnetic-ball-suspension system with state feedback, subject to initial condition $y(0) = x_1(0) = 1$.

Example 8-18-2

• 6장의 예제 6-5-1을 다시 살펴보면(K=1로 가정),

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{Ax}(t) + \mathbf{B}\theta_e(t) \qquad \theta_o(t) = \mathbf{Cx}(t)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -25 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = [1 \quad 0]$$

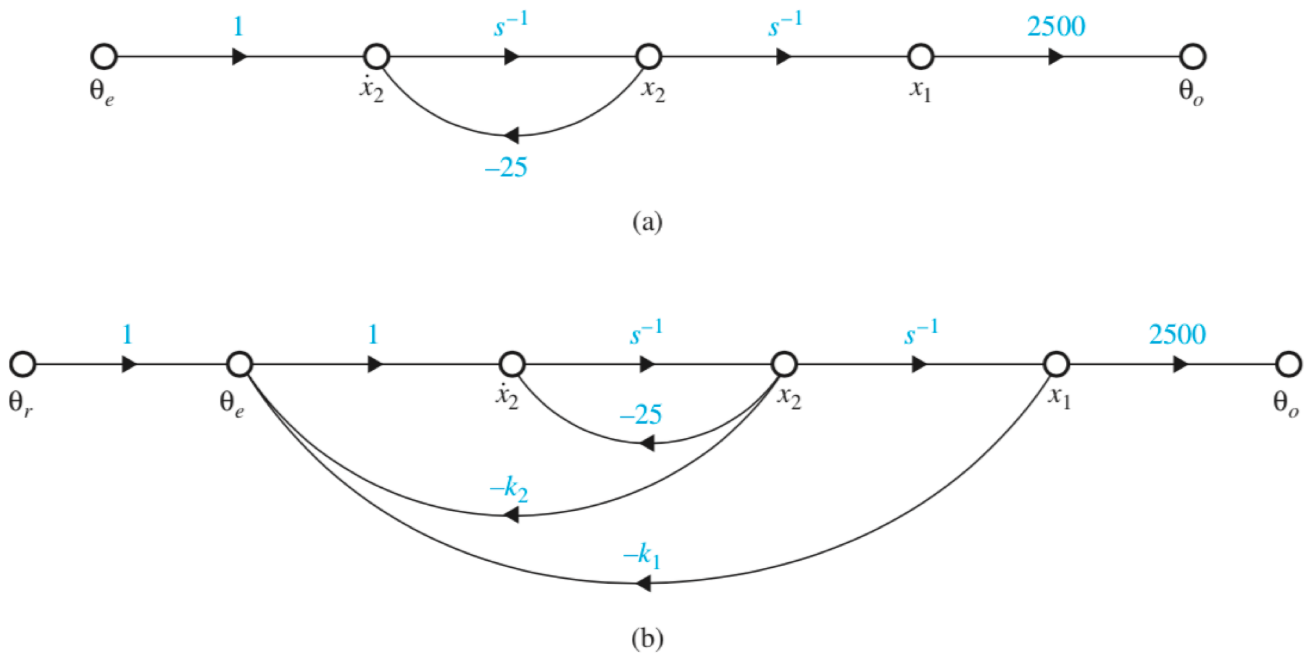


Figure 8-26 (*a*) State diagram of second-order sun-seeker system. (*b*) State diagram of second-order sun-seeker system with state feedback.

- 설계목표는 다음과 같다.

1. 계단입력에 따른 정상상태오차는 0이 되어야 한다.
2. 상태피드백 제어를 이용할 때, 단위계단응답은 최소의 오버슈트와 상승 시간 및 정정시간을 가져야 한다.

상태피드백을 갖는 시스템의 전달함수는 다음과 같다.

$$\frac{\Theta_o(s)}{\Theta_r(s)} = \frac{2500}{s^2 + (25 + k_2)s + k_1}$$

- 계단함수 입력에 대해서 출력은 정상상태에서 0의 오차를 갖는다면, 분자와 분모의 상수항들은 반드시 같아야 하며, 이 경우에는 $k_1 =$ 2500에 해당한다. 이는 시스템이 완전 가제어일지라도, 특성방정식의 두 근을 임의 로 할당할 수 없음을 의미한다. 이때 특성방정식은 다음과 같다.

$$s^2 + (25 + k_2)s + 2500 = 0$$

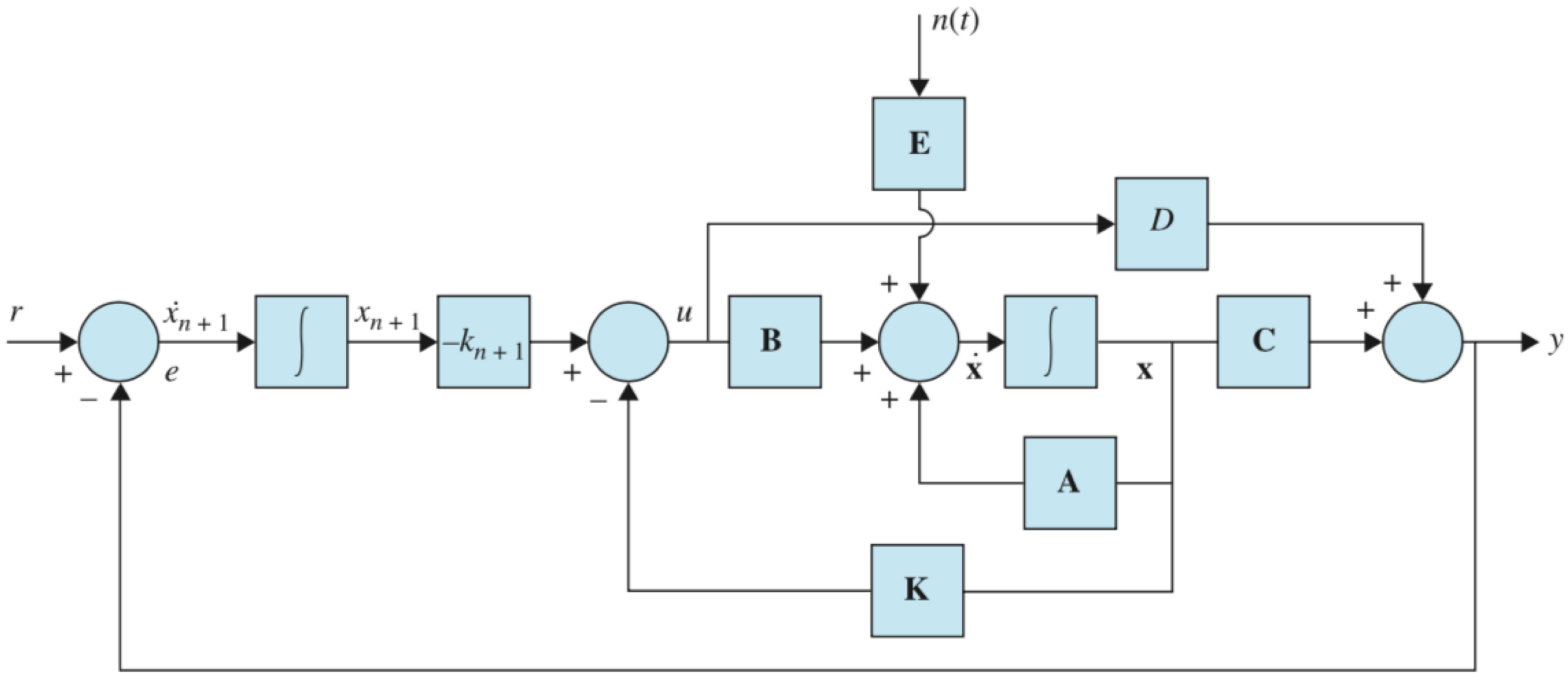
- MATLAB을 이용한 몇 번의 시행착오 후, $k_2 = 75$일때, 최대오버슈트와 상승시간 및 정정시간이 모두 최소이며, 두 근은 s =-50과 -50에 존재.

$$\text{최대오버슈트} = 0\%,\ t_r = 0.06717\text{초},\ t_s = 0.09467\text{초}$$

경희대학교 Kyung Hee University

State Feedback with Integral Control

- 상수이득피드백을 갖는 제어는, 일반적으로 특성방정식의 모든 근을 마음 대로 위치시킬 수 있을 때, 시스템이 입력을 따라가지 않아도 되는 조절기 시스템에 대해서만 사용할 수 있다.
- 일반적으로 대부분의 제어시스템은 입력을 추적해야 한다. 이 문제에 대한 하나의 해 법은 PI 제어기에서와 마찬가지로 상수이득의 상태피드백과 함께 적분제어를 도입하는 것



[그림 10-33] 상태피드백과 출력의 적분피드백을 이용한 제어시스템의 블록선도.

- $(n+1)$번째 적분기의 출력 은 x_{n+1}로 표기되어 있으며,

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) + \mathbf{E}n(t)$$

$$\frac{dx_{n+1}(t)}{dt} = r(t) - y(t)$$

$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + Du(t)$$

- 구동신호 $u(t)$는 상수상태피드백과 적분피드백을 통해 상태변수와 다음 관계를 갖는다.

$$u(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) - k_{n+1}x_{n+1}(t) \qquad \mathbf{K} = [\, k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad \cdots \quad k_n \,]$$

- 상수이득피드백과 적분피드백을 갖는 전체 시스템의 $n+1$차 상태방정식은 다음과 같다.

$$\frac{d\overline{\mathbf{x}}(t)}{dt} = (\overline{\mathbf{A}} - \overline{\mathbf{B}}\,\overline{\mathbf{K}})\overline{\mathbf{x}}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} r(t) + \overline{\mathbf{E}}n(t)$$

$$\overline{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dfrac{d\mathbf{x}(t)}{dt} \\[2ex] \dfrac{dx_{n+1}(t)}{dt} \end{bmatrix} \quad (n+1) \times 1$$

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \quad (n+1)\times(n+1) \quad \bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ D \end{bmatrix} \quad (n+1)\times 1$$

$$\bar{\mathbf{K}} = [K \quad k_{n+1}] = [k_1 \quad k_2 \quad \cdots \quad k_n \quad k_{n+1}] \quad 1\times(n+1)$$

$$\bar{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ 0 \end{bmatrix} \quad [(n+1)\times 1]$$

$$y(t) = \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{x}}(t) \qquad \bar{\mathbf{C}} = [\mathbf{C} - D\mathbf{K} \quad D\mathbf{K}][1\times(n+1)]$$

- 이러한 제어기의 설계목표는

1. 출력 $y(t)$의 정상상태 값은 오차 없이 계단함수입력을 따라간다.

$$e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t) = 0$$

2. $(\bar{\mathbf{A}} - \bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{K}})$의 $n+1$개 고유치를 원하는 곳에 놓는다. 마지막 조건이 가능하다면, $[\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}]$ 쌍이 완전 가제어가 되어야 한다.

Example 8-19-1

- Ex. 8-18-2에서 상수이득 상태피드백제어를 이용하여, 2차 태양추적시스템이 정상상태오차 없이 계단입력을 추적하도록 두 근 중 하나만을 자유롭게 선택할 수 있음을 보였다. 이제 적분제어를 전방경로에 추가하면,

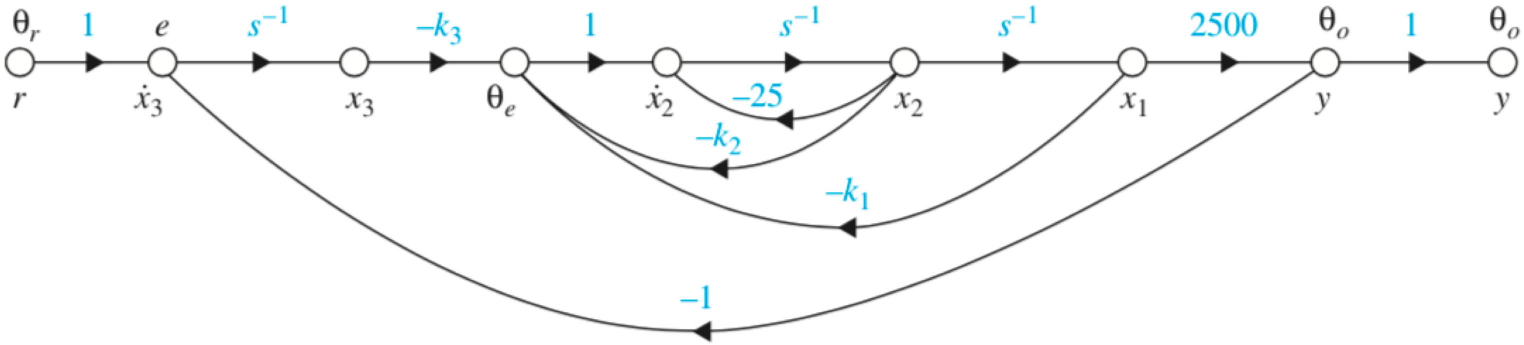


Figure 8-28 Sun-seeker system with state feedback and integral control in Example 8-18-1.

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -25 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}=\begin{bmatrix} 2500 & 0 \end{bmatrix} \quad D=0$$

$$\Rightarrow$$

$$\bar{\mathbf{A}}=\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -25 & 0 \\ -2500 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{B}}=\begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ D \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$[\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}]$ 쌍이 완전 가제어인 것을 증명할 수 있다. 따라서 $(s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}} - \bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{K}})$의 고유치를 임의로 위치시킬 수 있다. 상태 및 적분피드백을 갖는 폐루프시스템의 특성방정식에 $\bar{\mathbf{A}}$, $\bar{\mathbf{B}}$ 및 $\bar{\mathbf{K}}$를 대입하면

$$\left|s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{K}}\right| = \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ k_1 & s+25+k_2 & k_3 \\ -2500 & 0 & s \end{vmatrix} = s^3 + (25+k_2)s^2 + k_1 s + 2500\,k_3 = 0 \tag{10-355}$$

설계목표는 다음과 같다.

1. 정상상태 출력은 계단함수입력에 오차 없이 추적해야 한다.
2. 상승시간과 정정시간은 0.05초 이하이다.
3. 단위계단입력에 대한 최대오버슈트는 5% 이하이다.

- 빠른 상승시간과 정정시간을 실현하기 위해, 특성방정식의 근들이 s 평면의 왼쪽으로 멀리 위치하여야 하고, 고유주파수는 높아야 한다. 근들의 크기가 크면 상태피드백 행렬의 이득도 커짐.
- MATLAB을 이용하여 근들을 정해보면,

$$s = -200 \quad -50 + j50 \quad \text{and} \quad -50 - j50$$

- 특성방정식과 상수 ***K***는

$$s^3 + 300s^2 + 25,000s + 1,000,000 = 0$$

$$k_1 = 25,000 \quad k_2 = 275 \quad \text{and} \quad k_3 = 400$$

- 단위계단응답의 특성은 다음과 같음.

$$\text{최대오버슈트} = 4\%$$
$$t_r = 0.03247\text{초}$$
$$t_s = 0.04667\text{초}$$

- 참고: 선정한 근의 값이 크기 때문에,k1의 높은 피드백 이득은 물리적인 문제를 일으킬 수 있다.문제가 발생할 경우 설계사양을 다시 조정해야 한다.

Example 8-19-2

- DC 모터 시스템을 살펴보자.

$$\frac{d\omega(t)}{dt} = \frac{-B}{J}\omega(t) + \frac{K_i}{J}i_a(t) - \frac{1}{J}T_L$$

$$\frac{di_a(t)}{dt} = \frac{-K_b}{L}\omega(t) - \frac{R}{L}i_a(t) + \frac{1}{L}e_a(t)$$

출력방정식은

$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) = [1 \quad 0]\mathbf{x}(t)$$

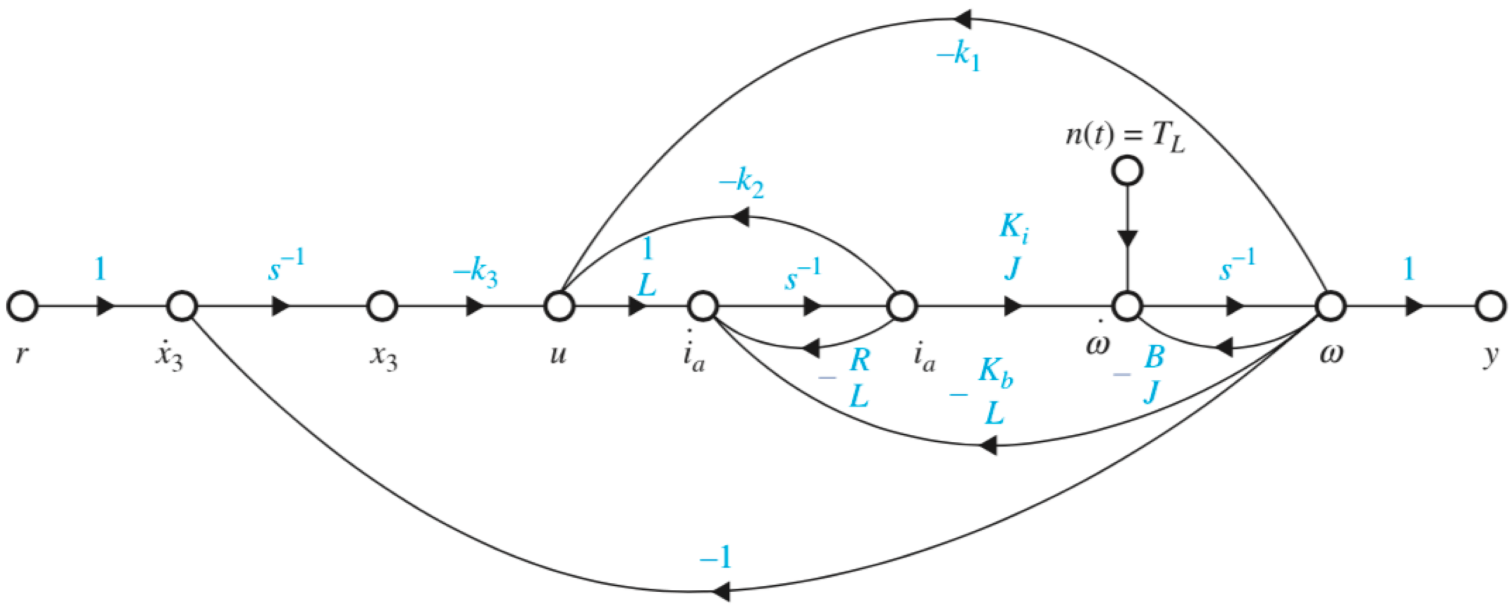
- 설계문제는 상태피드백과 적분제어를 통해 $u(t) = e_a(t)$를 구함.

1. $\lim_{t \to \infty} i_a(t) = 0$, $\lim_{t \to \infty} \frac{d\omega(t)}{dt} = 0$

2. $\lim_{t \to \infty} \omega(t)$ = 계단입력 $r(t) = u_s(t)$

3. 상태피드백과 적분제어를 갖는 폐루프시스템의 고유치는 $s = -300, -10 + j10$ 및 $-10 - j10$이다.

상태변수들은 $x_1(t) = \omega(t)$ 및 $x_2(t) = i_a(t)$로 정의하자.



$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) + \mathbf{E}n(t) \qquad \text{where } n(t) = T_L u_s(t).$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{B}{J} & \frac{K_i}{J} \\ -\frac{K_b}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 50 \\ -200 & -200 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 200 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{J} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -50 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- 상태피드백과 적분제어를 추가하면,

• 상태피드백과 적분제어를 추가하면,

$$\overline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 50 & 0 \\ -200 & -200 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \overline{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 200 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\overline{\mathbf{C}} = [\mathbf{C} \quad 0] = [1 \quad 0 \quad 0] \quad \overline{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -50 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad u(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) - k_{n+1}x_{n+1}(t) = \overline{\mathbf{K}}\overline{\mathbf{x}}(t)$$

폐루프시스템의 계수행렬은

$$\overline{\mathbf{A}} - \overline{\mathbf{B}}\,\overline{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} 0 & 50 & 0 \\ -200 - 200k_1 & -200 - 200k_2 & -200k_3 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

특성방정식은 다음과 같다.

$$\left| s\mathbf{I} - \overline{\mathbf{A}} + \overline{\mathbf{B}}\,\overline{\mathbf{K}} \right| = s^3 + 200(1 + k_2)s^2 + 10,000(1 + k_1)s - 10,000k_3 = 0$$

할당된 세 근을 위하여, 마지막 식은 다음 식과 같아야 한다.

$$s^3 + 320s^2 + 6,200s + 60,000 = 0$$

$$k_1 = -0.38 \quad k_2 = 0.6 \quad k_3 = -6.0$$

입력 $r(t)$ 및 $n(t)$와 상태변수 $\omega(t)$ 및 $i_a(t)$ 사이에 SFG 이득공식을 그림 10-35에 적용하면

$$\begin{bmatrix} \Omega(s) \\ I_a(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta_c(s)} \begin{bmatrix} -\frac{1}{J}\left(s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{k_2}{L}s\right) & -\frac{k_3 K_i}{JL} \\ -\frac{1}{J}\left(-\frac{K_b}{L}s - \frac{k_1}{L}s + \frac{k_3}{L}\right) & -\frac{k_3}{L}\left(s + \frac{B}{J}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{T_L}{s} \\ \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

위 식에 최종치 정리를 적용하여 상태변수들의 정상상태 값을 구하면

$$\lim_{t\to\infty} \begin{bmatrix} \omega(t) \\ i_a(t) \end{bmatrix} = \lim_{s\to 0} s \begin{bmatrix} \Omega(s) \\ I_a(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & K_i \\ 1 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_L \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ T_L \end{bmatrix}$$