자동제어(Automatic Control)
9장 근궤적 기법

교재: Automatic Control Systems

경희대학교
Kyung Hee University

서론

- 선형제어 시스템
  - 폐루프 전달함수의 극점과 영점
  - 극점
    - 선형 SISO 시스템의 절대 및 상대 안정도를 결정
  - 영점
    - 시스템의 과도성질 결정
  - 시스템의 임의의 파라미터가 변할 때 특성방정식의 근궤적

서론

- 근궤적 기법
  - 하나 또는 그 이상의 변수 파라미터를 가지는 대수방정식의 근의 성질을 연구하는데 응용

$$F(s) = P(s) + KQ(s) = 0$$

$$P(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$$

$$Q(s) = s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0$$

- K : 실정수, $-\infty < K < \infty$
- n, m : 양의 정수
- $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, b_0, b_1, \ldots, b_{m-1}$: 실수, 일정

서론

- 근콘투어(root contour)
  - 다변수 파라미터에서 한번에 한 개의 파라미터를 변화시키면서 얻어낸 근궤적
  - 식(9-1) ~ (9-3) 의 s 를 z 로 치환함으로써 선형이산치 제어시스템 특성방정식의 근궤적을 구성할 수 있음(부록 E)

- K 값에 근거한 영역의 정의
  - RL(root loci) : $-\infty < K < \infty$ 의 전체 근궤적
  - RC(root contour) : 한 개 이상의 파라미터가 변할 때의 근궤적

근궤적의 기본 성질

- 단일 루프 제어시스템의 폐루프 전달함수

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$$

– 폐루프 시스템의 특성방정식은 $Y(s)/R(s)$ 의 분모다항식을 '0'

$$1+G(s)H(s)=0$$

– $G(s)H(s)$ 는 가변 파라미터 K 를 곱셈인자로 포함한다고 가정

– 유리함수 $$G(s)H(s)=\frac{KQ(s)}{P(s)}$$

  - $P(s)=s^{\mathrm{n}}+a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_1s+a_0$
  - $Q(s)=s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\ldots+b_1s+b_0$

근궤적의 기본 성질

$$1+G(s)H(s)=0$$

$$\Leftrightarrow 1+\frac{KQ(s)}{P(s)}=\frac{P(s)+KQ(s)}{P(s)}=0$$

- Ex. 제어시스템의 특성방정식이 다음과 같다고 가정

  - $s(s+1)(s+2)+s^2+(3+2K)s+5=0$

$$\Rightarrow 1+\frac{2Ks}{s(s+1)(s+2)+s^2+3s+5}=0$$

$$\therefore \frac{Q(s)}{P(s)}=\frac{2s}{s^3+4s+5s+5}$$

근궤적의 기본 성질

- $G(s)H(s)$ 를 다음과 같이 표기

$$G(s)H(s) = KG_1(s)H_1(s) \qquad (9\text{-}11)$$

$G_1(s)H_1(s)$ 는 가변 파라미터 K 를 포함하지 않음.

$$1+G(s)H(s)=0$$

$$\Leftrightarrow 1+KG_1(s)H_1(s)=0$$

$$\Leftrightarrow G_1(s)H_1(s) = -\frac{1}{K} \qquad (9\text{-}12)$$

근궤적의 기본 성질

- 식(9-12)가 충족되기 위한 조건
  - 크기조건

$$|G_1(s)H_1(s)| = \frac{1}{|K|}, \qquad -\infty < K < \infty$$

  - 각도조건 ($i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$(임의의 정수))

$$\angle G_1(s)H_1(s) = (2i+1)\pi, \qquad K \geq 0$$

$$= \text{ odd multiples of } \pi \text{ radians or } 180°$$

$$\angle G_1(s)H_1(s) = 2i\pi, \qquad K \leq 0$$

$$= \text{ even multiples of } \pi \text{ radians or } 180°$$

근궤적의 기본 성질

- 각도조건은 s 평면 내 근궤적을 그리는데 이용
- 근궤적이 그려지면 궤적 상 K 의 값은 크기조건을 이용

근궤적의 기본 성질

- 근궤적의 도해적 구성

$$G(s)H(s) = KG_1(s)H_1(s) = \frac{K(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)}$$

- 크기조건

$$|G_1(s)H_1(s)| = \frac{\prod_{i=1}^{m}|s+z_i|}{\prod_{k=1}^{n}|s+p_k|} = \frac{1}{|K|}, \qquad -\infty < K < \infty$$

- 각도조건

$$\text{where } 0 \le K < \infty: \quad \angle G_1(s)H_1(s) = \sum_{k=1}^{m}\angle(s+z_k) - \sum_{j=1}^{n}\angle(s+p_j) = (2i+1)\pi$$

$$\text{where } -\infty \le K < 0: \quad \angle G_1(s)H_1(s) = \sum_{k=1}^{m}\angle(s+z_k) - \sum_{j=1}^{n}\angle(s+p_j) = 2i\pi$$

$(i = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$

근궤적의 기본 성질

- 근궤적의 도해적 해석
  - K 의 양인 값에 대응하는 근궤적 상의 임의의 점 s_1 이 다음 조건을 만족시켜야 함
    - $G(s)H(s)$ 의 영점과 s_1 의 벡터각의 합과 극점과 s1의 벡터각의 합과의 차이가 180° 의 홀수배
  - K 의 음인 값에 대응하는 근궤적 상의 임의의 점 s_1 이 다음 조건을 만족시켜야 함
    - $G(s)H(s)$ 의 영점과 s_1 의 벡터각의 합과 극점과 s_1의 벡터각의 합과의 차이가 0° 를 포함해서 180° 의 짝수배

  - 근궤적 상의 K 의 값

$$|K| = \frac{\prod_{j=1}^{n} |s + p_j|}{\prod_{i=1}^{m} |s + z_i|}$$

극점 ~ s_1 의 벡터길이의 곱

영점 ~ s_1 의 벡터길이의 곱

근궤적의 기본 성질

- 전달함수

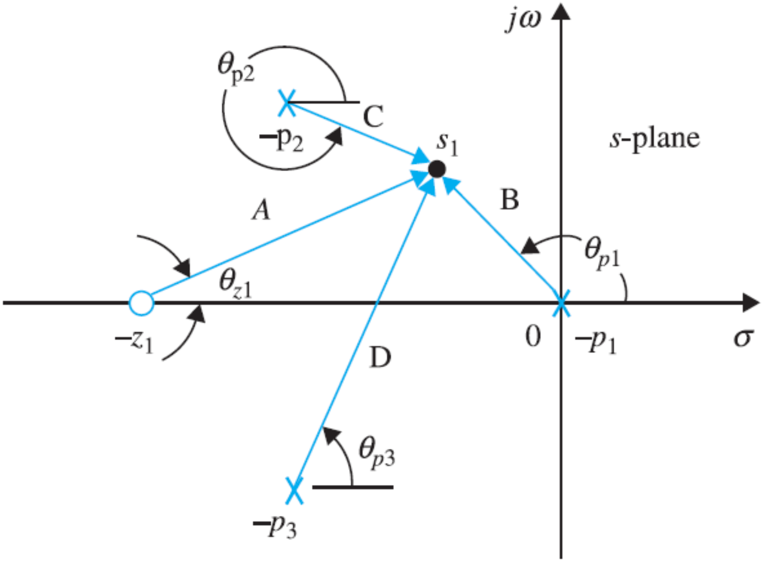
$$G(s)H(s) = \frac{K(s+z_1)}{s(s+p_2)(s+p_3)}$$

- 각도조건
  - 양의 K

$$\angle(s_1+z_1) - \angle s_1 - \angle(s_1+p_2) - \angle(s_1+p_3)$$
$$= \theta_{z1} - \theta_{p1} - \theta_{p2} - \theta_{p3} = (2i+1)\pi$$

  - 음의 K

$$\angle(s_1+z_1) - \angle s_1 - \angle(s_1+p_2) - \angle(s_1+p_3)$$
$$= \theta_{z1} - \theta_{p1} - \theta_{p2} - \theta_{p3} = 2i\pi$$



$$|K| = \frac{|s_1||s_1+p_2||s_1+p_3|}{|s_1+z_1|} = \frac{\mathbf{BCD}}{\mathbf{A}}$$

근궤적의 성질

- K=0 과 K=±∞ 인 점
    - 근궤적 상 K=0 인 점은 $G(s)H(s)$ 의 극점
    - 근궤적 상 K=±∞ 인 점은 $G(s)H(s)$ 의 영점

$$G_1(s)H_1(s) = -\frac{1}{K}$$

- 극점과 영점은 필요시 무한대에 있는 점도 포함

근궤적의 성질

예제 7-3-1

다음 방정식을 생각하자.

$$s(s+2)(s+3)+K(s+1)=0 \tag{7-26}$$

$K=0$일 때 이 방정식의 세 개의 근은 $s=0, -2$와 -3에 있다. K의 크기가 무한대이면 이 방정식의 세 개의 근은 $s=-1, \infty$와 ∞에 있다. s 평면에서 무한대는 점의 개념으로 생각하는 것이 유용하다. 유한 s 평면은 무한반경을 가지는 구의 아주 작은 부분으로 볼 수 있다. 이때 s 평면상 무한대는 우리가 직면한 구의 반대편의 한 점이 된다.

식 (7-26)의 양변을 K를 포함하지 않은 항으로 나누어 주면 다음을 얻는다.

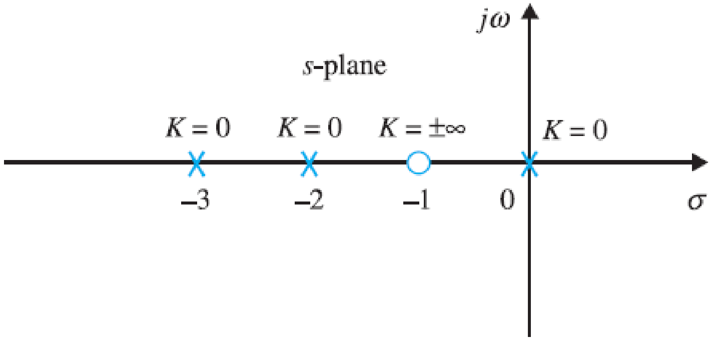
$$1+G(s)H(s)=1+\frac{K(s+1)}{s(s+2)(s+3)}=0 \tag{7-27}$$

이 식은

$$G(s)H(s)=\frac{K(s+1)}{s(s+2)(s+3)} \tag{7-28}$$

근궤적의 성질

그러므로 $K = 0$일 때 식 (7-26)의 세 개의 근은 함수 $G(s)H(s)$의 극과 같다. $K = \pm\infty$일 때 식 (7-26)의 세 개의 근은 무한대를 포함하는 세 개의 $G(s)H(s)$의 영점에 있다. $K = 0$에서의 근궤적 상 세 개의 점과 $K = \pm\infty$에서의 점을 그림 7-2에 나타내었다.



[그림 7-2] $s(s+2)(s+3) + K(s+1) = 0$의 근궤적상 $K = 0$과 $K = \pm\infty$.

근궤적의 성질

- 근궤적의 지로의 수
  - $F(s) = P(s) + KQ(s) = 0$ 의 근궤적의 지로의 수는 다항식의 차수와 같다.

  - Ex.
    - $s(s+2)(s+3)+K(s+1) = 0$
    - 방정식이 3차이기 때문에 근궤적의 지로의 수는 세 개
    - = 방정식의 근이 3개이기 때문에 근궤적의 지로의 수는 세 개

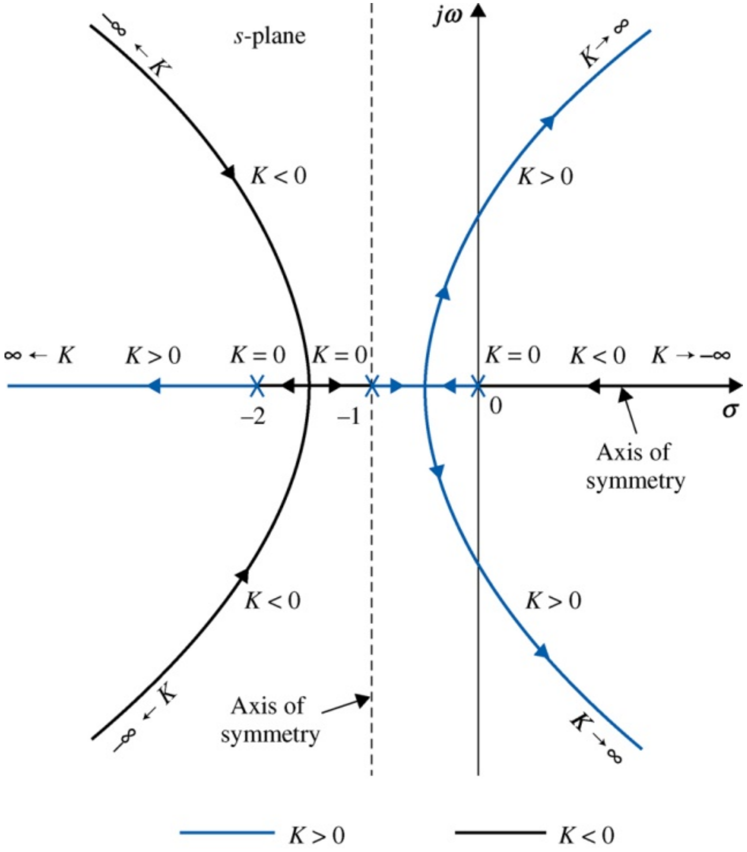
근궤적의 성질

- 근궤적의 대칭
  - 근궤적은 s 평면의 실수축에 대하여 대칭
  - 일반적으로 근궤적은 $G(s)H(s)$ 의 극과 영점의 대칭축에 대하여 대칭

– Ex.

$$s(s+1)(s+2)+K=0$$

$$G(s)H(s)=\frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$

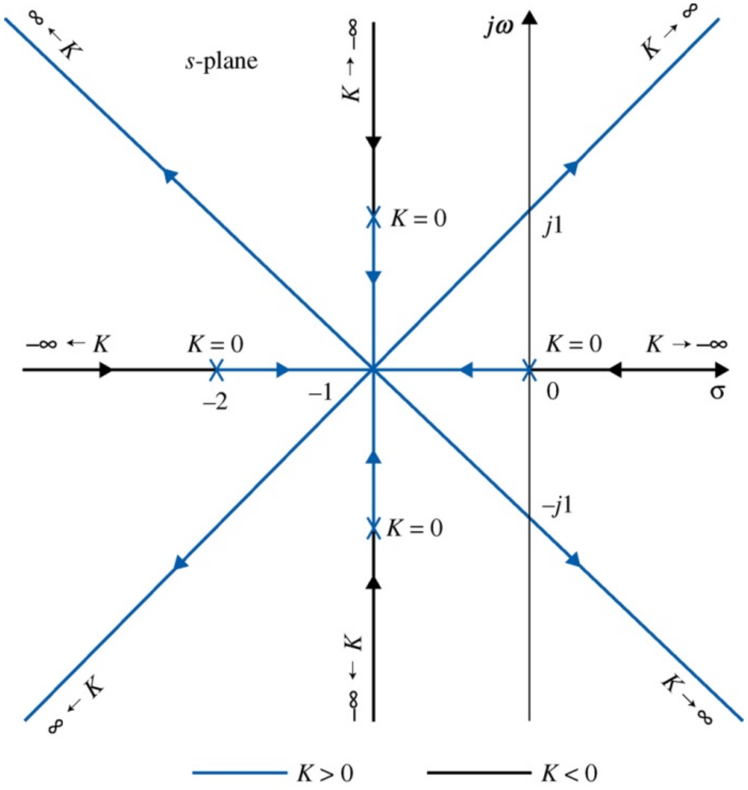


근궤적의 성질

- 근궤적의 대칭
  - 근궤적은 s 평면의 실수축에 대하여 대칭
  - 일반적으로 근궤적은 $G(s)H(s)$ 의 극과 영점의 대칭축에 대하여 대칭

– Ex.

$$s(s+1)(s+2)(s^2+2s+2)+K=0$$



근궤적의 성질

- 근궤적의 점근선 각도 : $|s|=\infty$ 에서 근궤적의 성질
  - s 의 값이 커지면 $K \geq 0$ 에 대한 근궤적은 다음 식으로 주어지는 각도를 가진 점근선에 접근

$$\theta_i = \frac{2i+1}{|n-m|} \times 180^\circ \quad n \neq m$$

    - $i = 0, 1, 2, \ldots, |n\text{-}m|\text{-}1$
    - n : $G(s)H(s)$ 의 유한극
    - m : $G(s)H(s)$ 의 영점

  - $K \leq 0$ 인 경우 근궤적의 점근선은 $K \geq 0$ 인 경우의 점근선의 연장선

근궤적의 성질

- 점근선의 교차점(도심)
  - 근궤적의 2|n-m| 개 점근선의 교차점은 s 평면의 실수축 상,

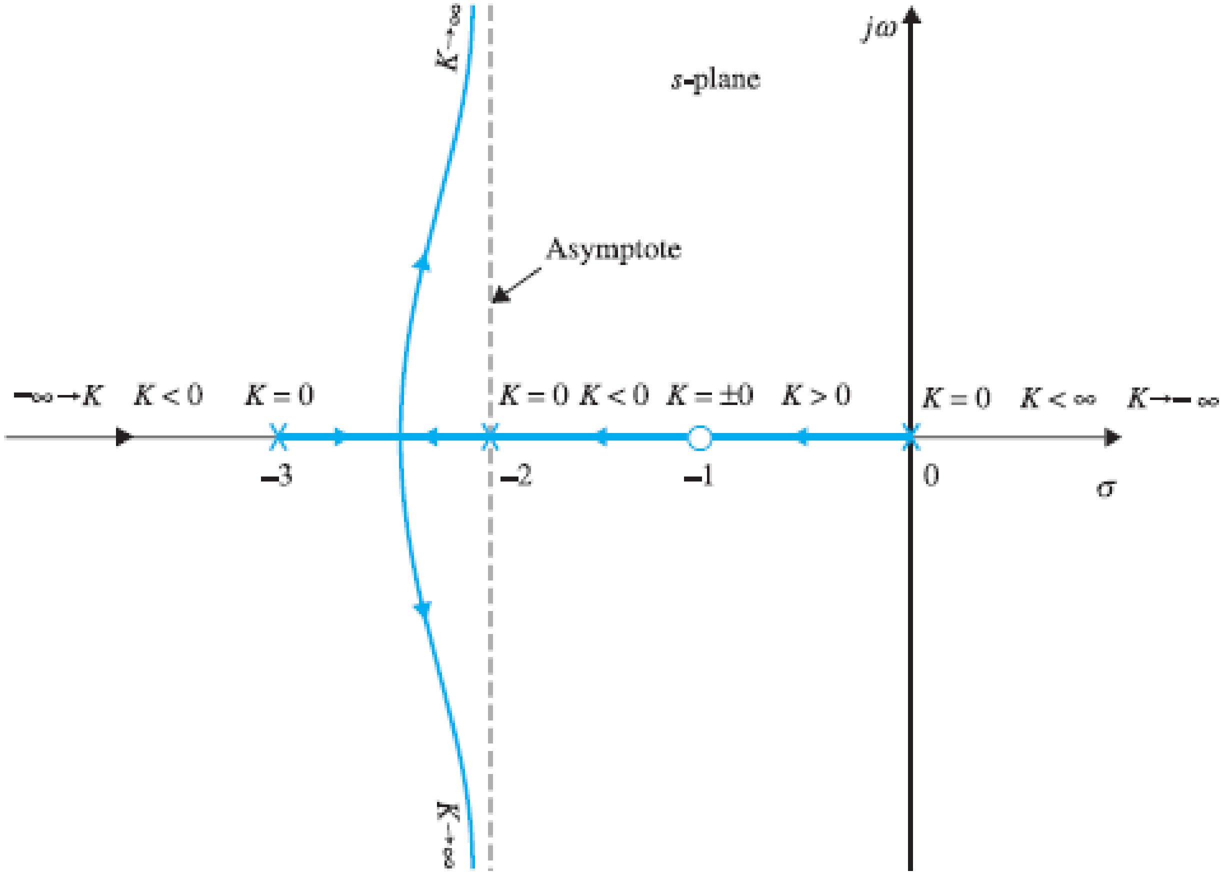
$$\sigma_1 = \frac{\Sigma\text{finite pole of } G(s)H(s) - \Sigma\text{finite zeros of } G(s)H(s)}{n-m}$$

- n : $G(s)H(s)$ 의 유한극의 수
- m : $G(s)H(s)$ 의 유한영점의 수
- σ_1 : 근궤적의 무게중심, 항상 실수

$$\sigma_1 = \frac{\Sigma\text{real parts pole of } G(s)H(s) - \Sigma\text{real parts zeros of } G(s)H(s)}{n-m}$$

근궤적의 성질

- -∞ < K < ∞ 의 근궤적과 점근선
  - $s(s+2)(s+3)+K(s+1)=0$



근궤적의 성질

- Ex.
  - $$G(s)H(s) = \frac{K(s+1)}{s(s+4)(s^2+2s+2)}$$
  - 특성방정식 : $s(s+4)(s^2+2s+2) + K(s+1) = 0$
  - 근궤적의 6가지 특성
    1. $K = 0$: 근궤적 위의 $K = 0$ 이 되는 점은 $G(s)H(s)$ 의 극점
       - $s = 0, -4, -1 + j, -1 - j$
    2. $K = \pm\infty$: 근궤적 위의$K = \pm\infty$ 인 점은 $G(s)H(s)$ 의 영점
       - $s = -1, \infty, \infty, \infty$
    3. 식이 4차식이므로 근궤적은 4개의 지로
    4. 근궤적은 실수축에 대칭

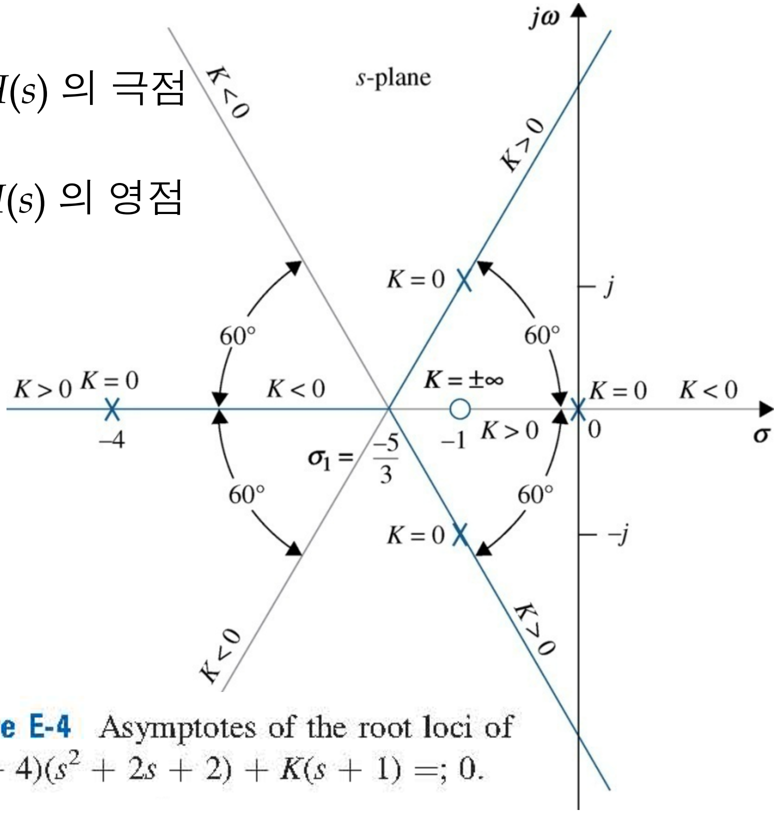


Figure E-4 Asymptotes of the root loci of $s(s + 4)(s^2 + 2s + 2) + K(s + 1) =; 0$.

근궤적의 성질

- Ex.
  - $G(s)H(s) = \dfrac{K(s+1)}{s(s+4)(s^2+2s+2)}$
  - 특성방정식 : $s(s+4)(s^2+2s+2)+K(s+1)=0$
  - 근궤적의 6가지 특성

    5. $G(s)H(s)$ 의 유한극점의 수가 유한영점의 수보
    3개 많기 때문에(n-m = 4-1 = 3), K=±∞ 일 때
    근궤적은 $s = \infty$ 에 접근
       - 근궤적($K \geq 0$)의 점근선의 각도

$$j = 0 : \theta_0 = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$$

$$j = 1 : \theta_1 = \frac{540^\circ}{3} = 180^\circ$$

$$j = 2 : \theta_2 = \frac{900^\circ}{3} = 300^\circ$$

       - 근궤적($K \leq 0$)의 점근선의 각도

         0˚ , 120 ˚ ,240 ˚

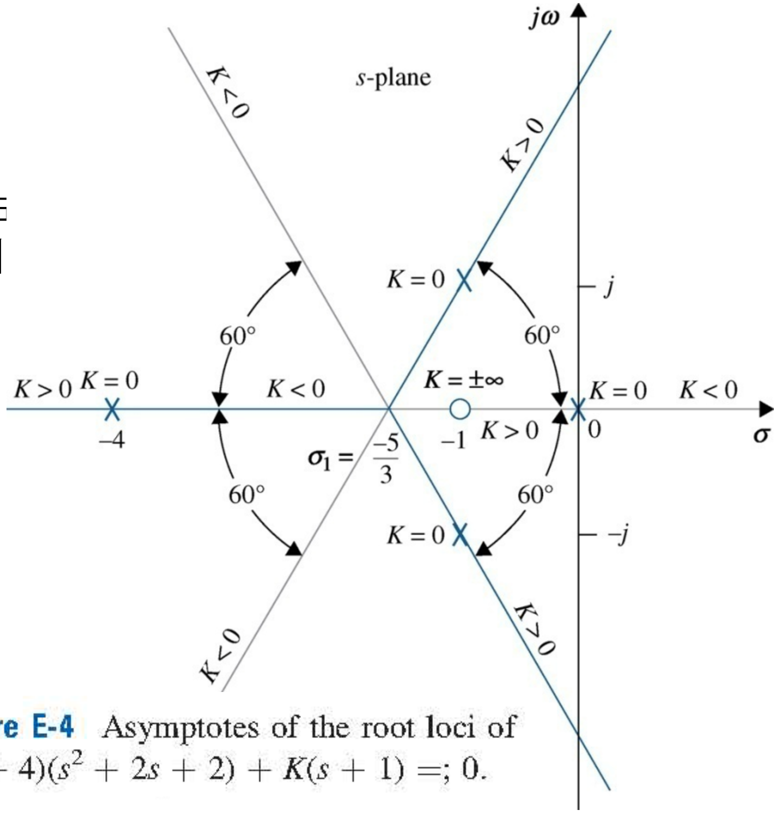


Figure E-4 Asymptotes of the root loci of $s(s + 4)(s^2 + 2s + 2) + K(s + 1) =; 0$.

근궤적의 성질

- Ex.
  - $G(s)H(s) = \dfrac{K(s+1)}{s(s+4)(s^2+2s+2)}$
  - 특성방정식 : $s(s+4)(s^2+2s+2) + K(s+1) = 0$
  - 근궤적의 6가지 특성
    6. 점근선의 교차점

$$\sigma_1 = \frac{(-4-1-4)-(-1)}{4-1} = -\frac{5}{3}$$

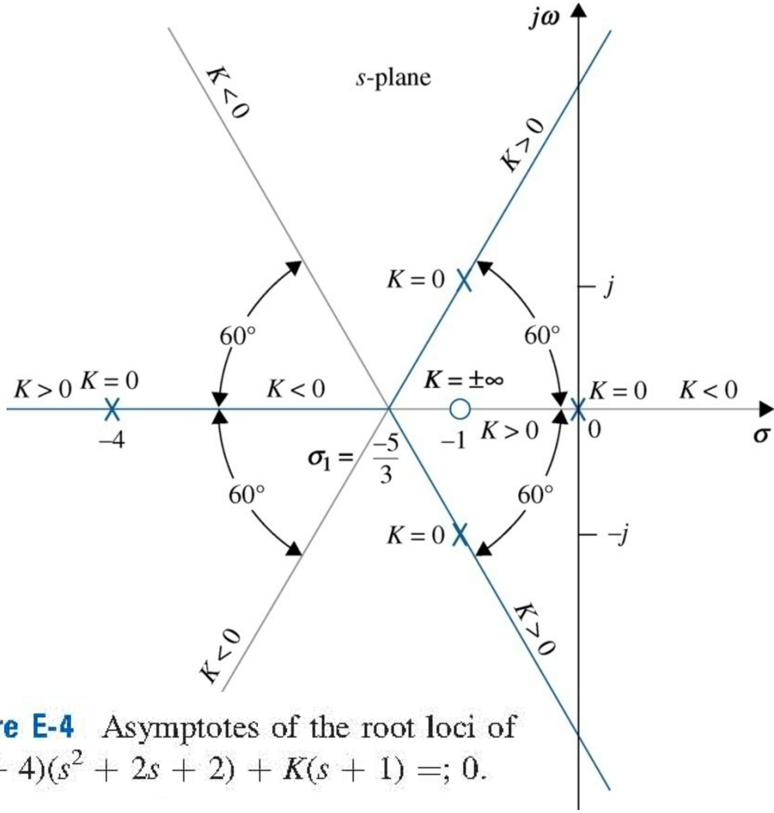


Figure E-4 Asymptotes of the root loci of $s(s+4)(s^2+2s+2) + K(s+1) =; 0$.

근궤적의 성질

- 여러 방정식의 근궤적의 점근선

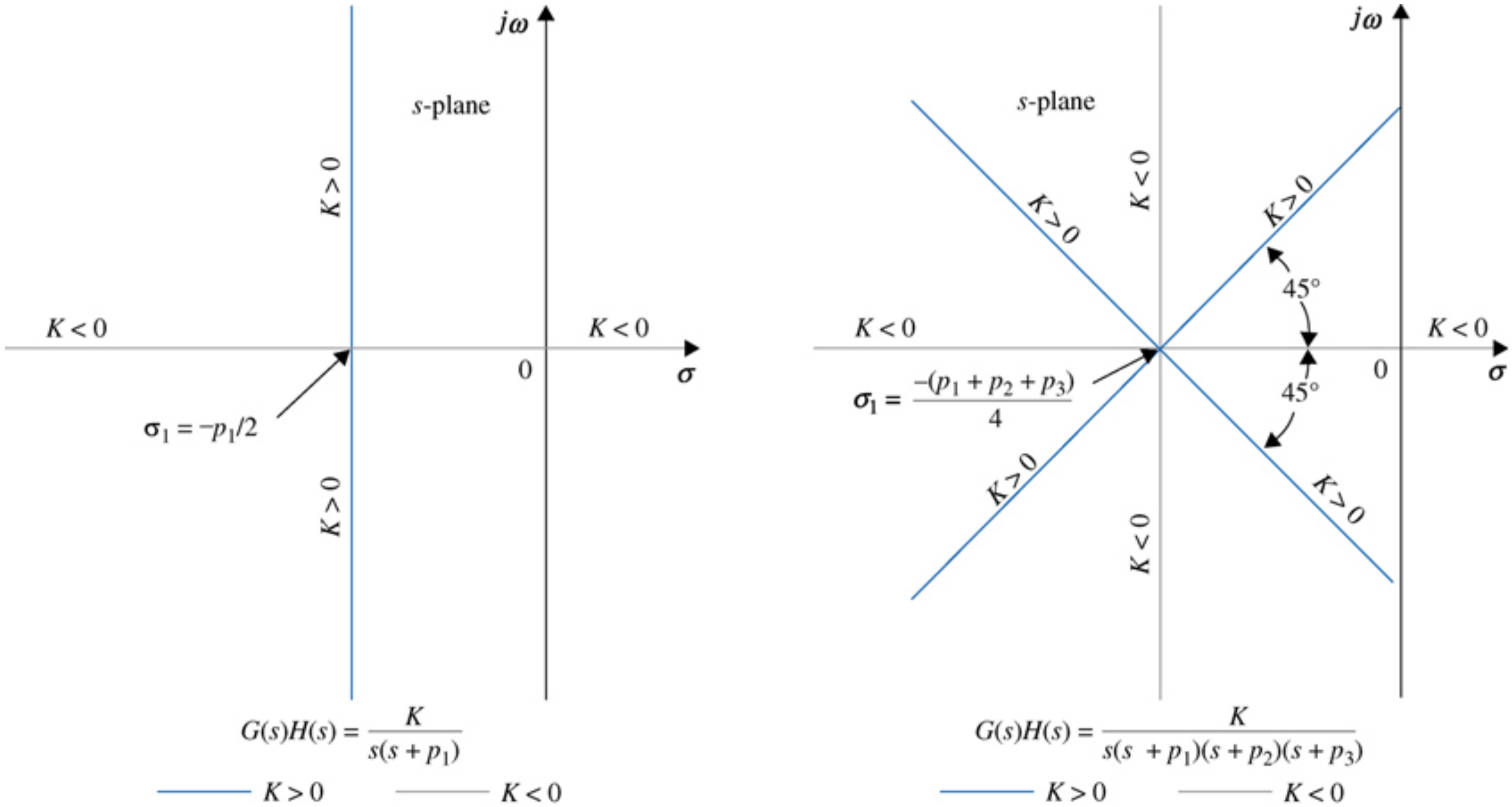


Figure E-5 Examples of the asymtotes of the root loci.

근궤적의 성질

- 여러 방정식의 근궤적의 점근선

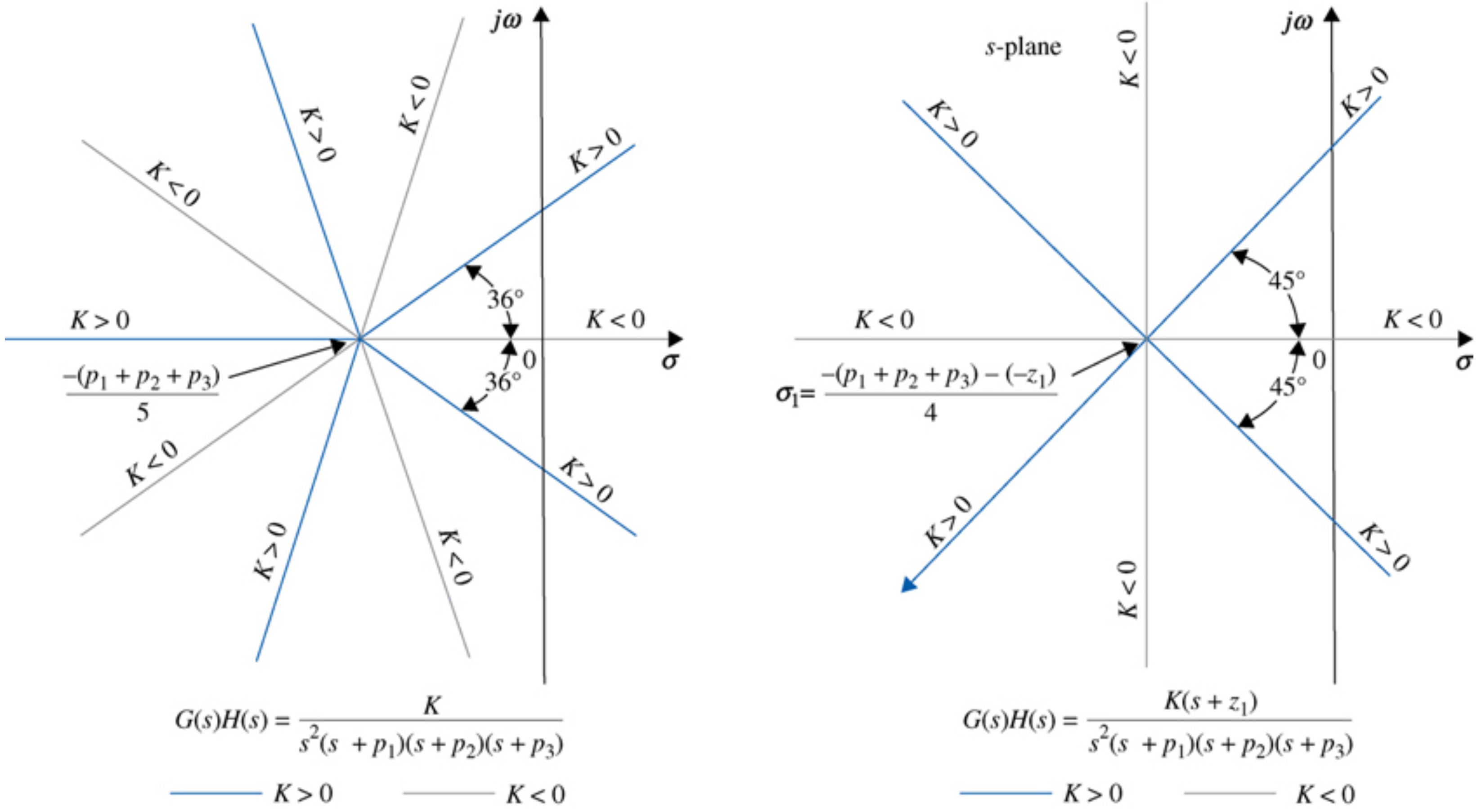


Figure E-5 Examples of the asymtotes of the root loci.

근궤적의 성질

- 실수축 상의 근궤적
  - s 평면의 전체 실수축은 K 의 모든 값의 근궤적으로 점유
  - $K \geq 0$ 의 근궤적
    - 실수축 상의 특정한 부분에 대해서 이 부분의 오른쪽에 위치한 $G(s)H(s)$의 극과 영점의 개수의 합이 기수일 경우에만 이 부분이 근궤적이 됨
  - $K \leq 0$ 의 근궤적
    - 실수축 상의 나머지 부분
  - $G(s)H(s)$ 의 공액복소쌍의 극과 영점은 실수축 상의 근궤적의 형태에 영향을 미치지 못함

근궤적의 성질

- 실수축 상의 근궤적
  - *Ex.*
    - 두 개의 극점과 영점을 가진 G(s)H(s) 의 실수축 상의 근궤적
    - 전체 실수축은 K 의 모든 값의 근궤적으로 점유

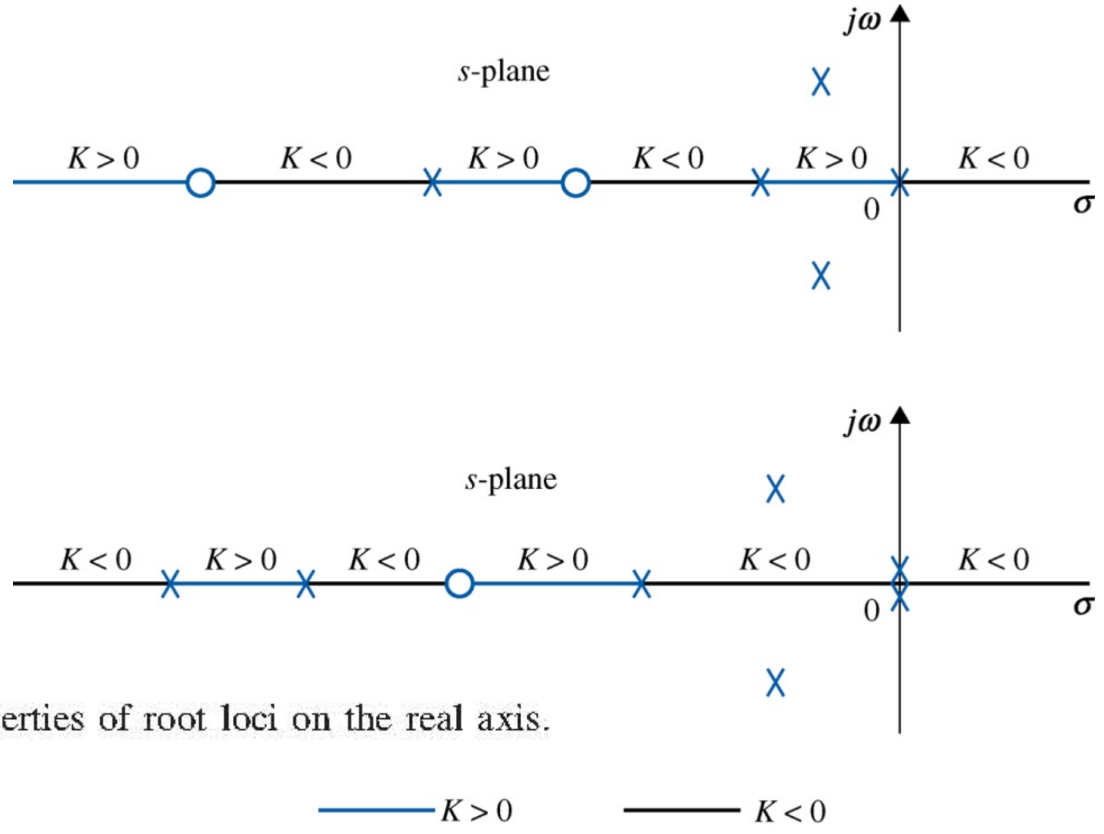


Figure E-6 Properties of root loci on the real axis.

근궤적의 성질

- 근궤적의 출발각과 도착각
  - G(s)H(s) 의 극이나 영점에서 근궤적의 출발각과 도착각은 각각 그 점 부근의 궤적에서 접선각
    - 극 s = -1 + j 부근의 근궤적은 극점을 떠나는 근궤적의 각도를 알면 좀더 정확히 그릴 수 있음
    - s = -1 + j 에서 근궤적의 출발각도 : θ2
    - s1 은 -1 + j 에서 극을 떠나는 근궤적상의 점
      - 극점과 매우 가까움
    - s1 은 반드시 각도조건을 만족해야 함

$$\angle G(s_1)H(s_1) = -(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4) = (2i+1)\pi$$

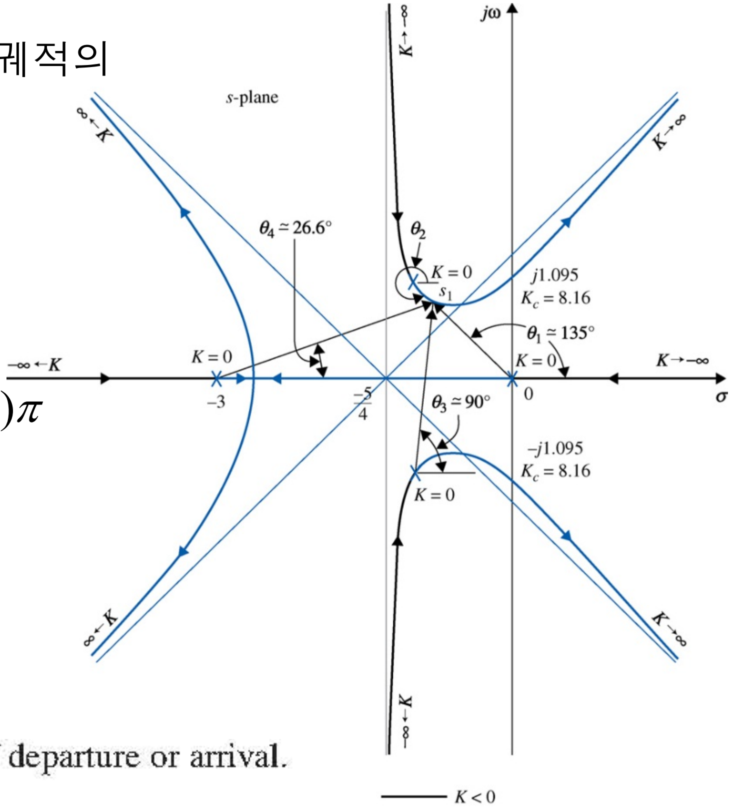


Figure E-7 Root loci of $s(s+3)(s^2+2s+2)+K=0$ to illustrate the angles of departure or arrival.

근궤적의 성질

- 근궤적의 출발각과 도착각
  - $G(s)H(s)$ 의 극이나 영점에서 근궤적의 출발각과 도착각은 각각 그 점 부근의 궤적에서 접선각
    - 극 $s = -1 + j$ 부근의 근궤적은 극점을 떠나는 근궤적의 각도를 알면 좀더 정확히 그릴 수 있음
    - $s = -1 + j$ 에서 근궤적의 출발각도 : θ_2
    - s_1 은 $-1 + j$ 에서 극을 떠나는 근궤적상의 점
      - 극점과 매우 가까움
    - s_1 은 반드시 각도조건을 만족해야 함

$$\angle G(s_1)H(s_1) = -(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4) = (2i+1)\pi$$

$$= -(135^\circ + \theta_2 + 90^\circ + 26.6^\circ) = (2i+1)\pi$$

- i 를 -1 로 두면, $\theta_2 = -71.6^\circ$

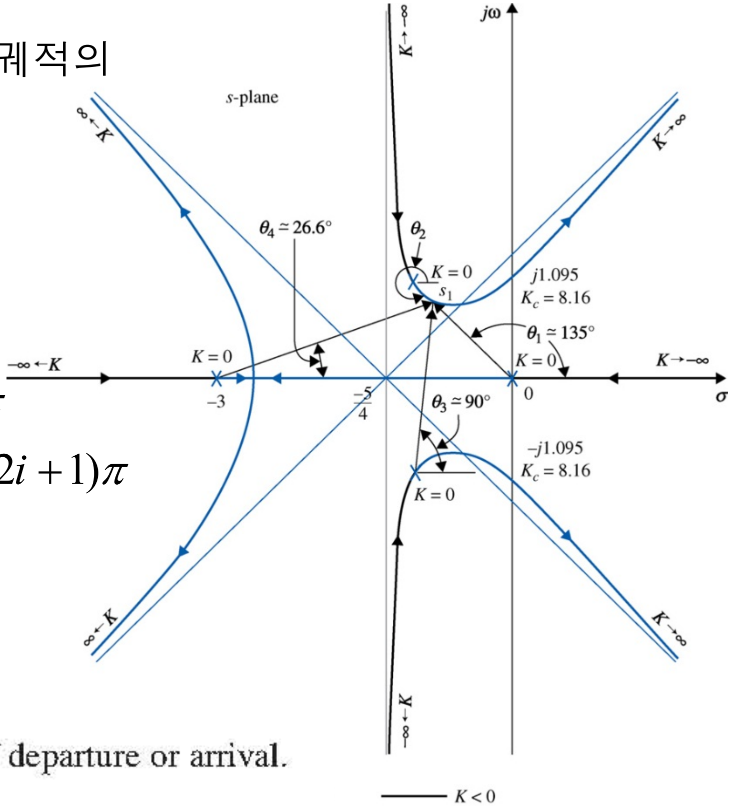


Figure E-7 Root loci of $s(s+3)(s^2+2s+2)+K=0$ to illustrate the angles of departure or arrival.

근궤적의 성질

- 근궤적의 출발각과 도착각
  - 단순극, 단순영점에서 $K \geq 0$ 에 대한 근궤적의 출발각, 도착각이 정해지면, $K \leq 0$ 에 대한 근궤적의 출발각, 도착각은 같은 점에서 180° 만큼 다르다.
  - -1 + j 에서 $K \leq 0$ 에 대한 근궤적의 출발각
    - 180 – 71.6 = 108.4°

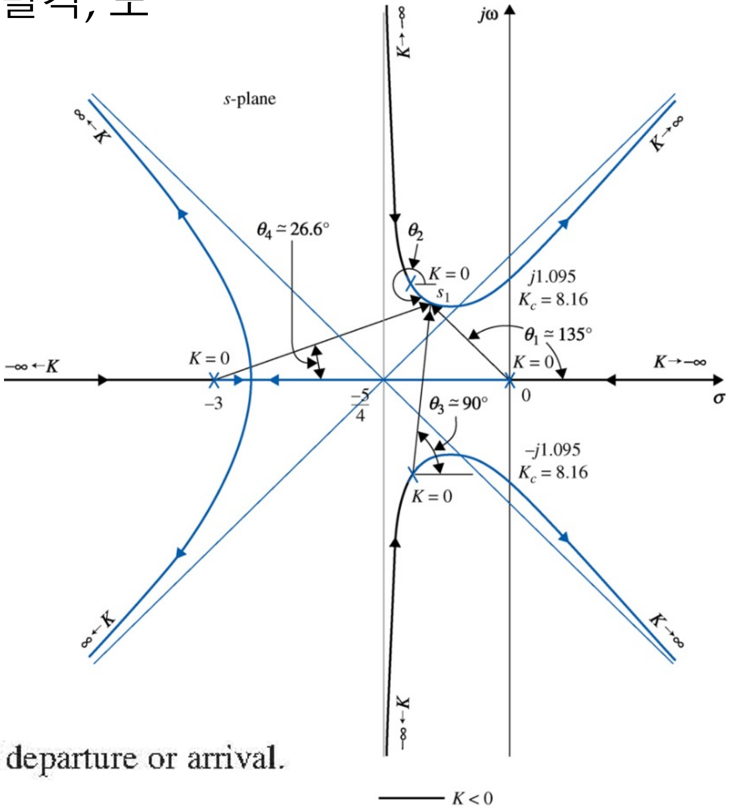


Figure E-7 Root loci of $s(s + 3)(s^2 + 2s + 2) + K = 0$ to illustrate the angles of departure or arrival.

근궤적의 성질

- 근궤적과 허수축과의 교차
  - 근궤적이 s 평면 허수축과 교차하는 점이 있다면, 이에 대응되는 K 의 값은 Routh-Hurwitz 판별법으로 결정
  - 다중교차하는 경우 교차점과 K 의 임계값은 컴퓨터 프로그램을 이용
- $s(s+3)(s^2+2s+2)+K=0$

  $\Rightarrow s^4+5s^3+8s^2+6s+K$

$$\begin{array}{llll}
s^4 & 1 & 8 & K \\
s^3 & 5 & 6 & 0 \\
s^2 & \dfrac{-\begin{vmatrix}1 & 8\\ 5 & 6\end{vmatrix}}{5} = 6.8 & \dfrac{-\begin{vmatrix}1 & K\\ 5 & 0\end{vmatrix}}{5} = K & \dfrac{-\begin{vmatrix}1 & 0\\ 5 & 0\end{vmatrix}}{5} = 0 \\
s^1 & \dfrac{-\begin{vmatrix}5 & 6\\ 6.8 & K\end{vmatrix}}{6.8} = \dfrac{-(5K-40.8)}{6.8} & \dfrac{-\begin{vmatrix}5 & 0\\ 6.8 & 0\end{vmatrix}}{6.8} = 0 & 0 \\
s^0 & K & 0 & 0
\end{array}$$

$$\therefore K \le 8.16$$

근궤적의 성질

- 근궤적 상 이탈점
  - 방정식의 근궤적 상 이탈점은 그 방정식의 다중근에 대응

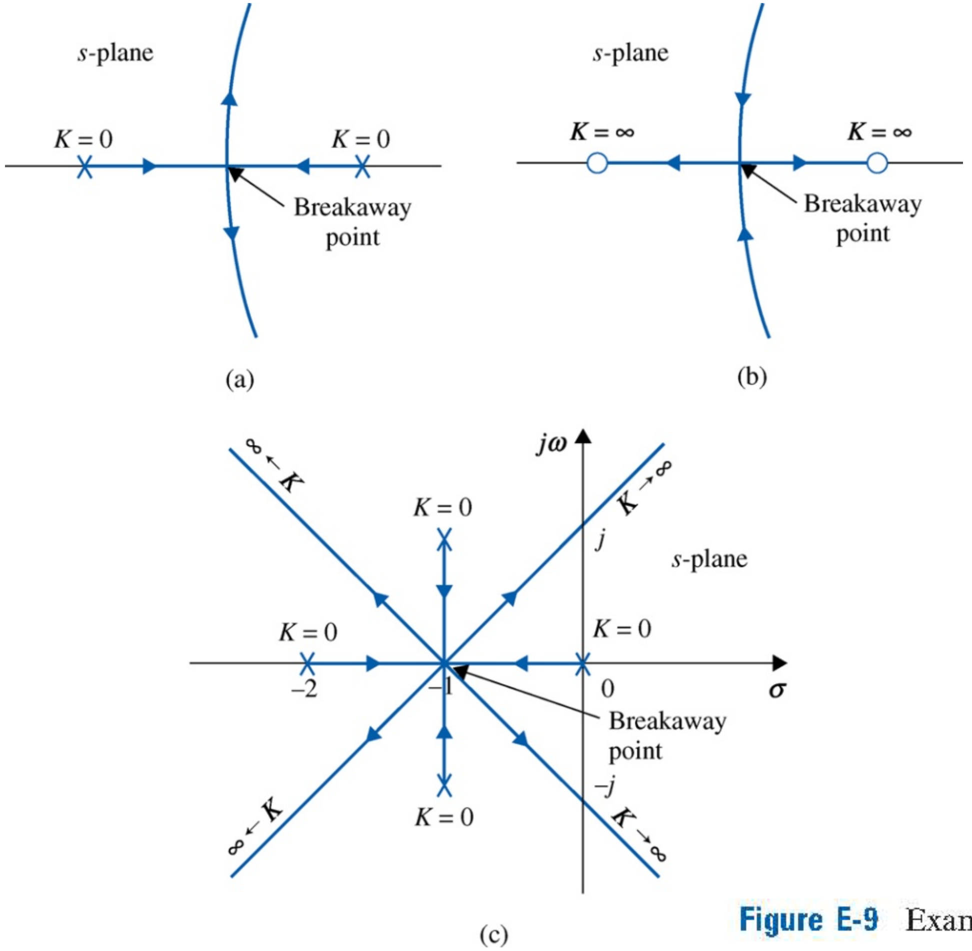


Figure E-9 Examples of breakaway points on the real axis in the s-plane.

근궤적의 성질

- 근궤적 상 이탈점

- $1+KG_1(s)H_1(s)=0$ 의 근궤적상 이탈점은 다음 식을 만족시켜야 함

$$\frac{dG_1(s)H_1(s)}{ds}=0 \qquad (9\text{-}32)$$

- 필요조건
  1. 식(9-32)의 모든 실수해는 모든 K의 값에 대하여 근궤적 상 이탈점
  2. 식(9-32)의 모든 공액복소해는 특성방정식을 만족하거나 근궤적 상에 있는 경우에만 이탈점

근궤적의 성질

- 근궤적 상 이탈점

3. 근궤적의 조건이 아래 식과 같기 때문에 양변을 미분하면,

$$K = -\frac{1}{G_1(s)H_1(s)} \Rightarrow \frac{dK}{ds} = \frac{dG_1(s)H_1(s)/ds}{\left[G_1(s)H_1(s)\right]^2}$$

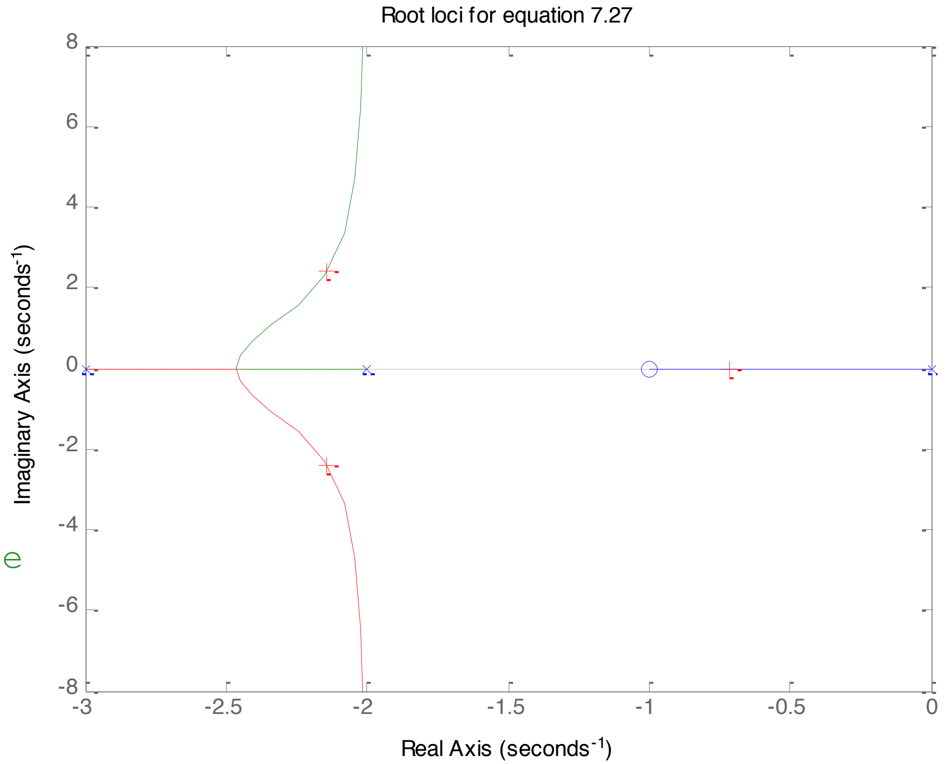
따라서, 이탈점의 조건은

$$\frac{dK}{ds} = 0$$

근궤적의 성질

- Toolbox 7-3-1

```
%%Toolbox 7-3-1
%%그림 7-3 을 위한 MATLAB 명령
num = [1 1];
den = conv([1 0], [1 2]);
den = conv(den, [1 3]);
mysys = tf(num, den);
rlocus(mysys);
title('Root loci for equation 7.27');
axis([-3 0 -8 8]);
[k, poles]=rlocfind(mysys);
%rlocfind command in MATLAB can choose
%the desired poles on the locus
```



근궤적의 성질

[표 7-1] $1 + KG_1(s)H_1 = 0$인 근궤적의 성질

1. $K = 0$ points	The $K = 0$ points are at the poles of $G(s)H(s)$, including those at $s = \infty$.
2. $K = \pm\infty$ points	The $K = \infty$ points are at the zeros of $G(s)H(s)$, including those at $s = \infty$.
3. Number of separate root loci	The total number of root loci is equal to the order of the equation $1 + KG_1(s)H_1(s) = 0$.
4. Symmetry of root loci	The root loci are symmetrical about the axes of symmetry the of pole-zero configuration of $G(s)H(s)$.
5. Asymptotes of root loci as $s \rightarrow \infty$	For large values of s, the RL ($K > 0$) are asymptotic to asymptotes with angles given by $\theta_i = \frac{2i+1}{\lvert n-m \rvert} \times 180°$ For $K<0$, the RL are asymptotic to $\theta_i = \frac{2i}{\lvert n-m \rvert} \times 180°$ where $i = 0, 1, 2, \ldots, \lvert n - m \rvert - 1,$ n = number of finite poles of $G(s)H(s)$, and m = number of finite zeros of $G(s)H(s)$.

근궤적의 성질

[표 7-1] $1 + KG_1(s)H_1 = 0$인 근궤적의 성질

6. Intersection of the asymptotes	(a) The intersection of the asymptotes lies only on the real axis in the s-plane. (b) The point of intersection of the asymptotes is given by $\sigma_1 = \frac{\sum \text{real parts of poles of} G(s)H(s) - \sum \text{real parts of zeros of} G(s)H(s)}{n-m}$
7. Root loci on the real axis.	RL for $K \geq 0$ are found in a section of the real axis only if the total number of real poles and zeros of $G(s)H(s)$ to the **right** of the section is **odd**. If the total number of real poles and zeros to the right of a given section is **even**, RL for $K \leq 0$ are found.

근궤적의 성질

[표 7-1] $1 + KG_1(s)H_1 = 0$인 근궤적의 성질

8. Angles of departure	The angle of departure or arrival of the RL from a pole or a zero of $G(s)H(s)$ can be determined by assuming a point s_1 that is very close to the pole, or zero, and applying the equation $\angle G(s_1)H(s_1) = \sum_{k=1}^{m} \angle(s_1 - z_k) - \sum_{j=1}^{m} \angle(s_1 - p_j)$ $= 2(i+1)180^\circ \quad K \geq 0$ $= 2i \times 180^\circ \quad K \leq 0$ where $i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$
9. Intersection of the root loci with the imaginary axis	The crossing points of the root loci on the imaginary axis and the corresponding values of K may be found by use of the Routh-Hurwitz criterion.
10. Breakaway points	The breakaway points on the root loci are determined by finding the roots of $dK/ds = 0$, or $dG(s)H(s)/ds = 0$. These are necessary conditions only.
11. Calculation of the values of K	The absolute value of K at any point s_1 on the root loci is on the root loci determined from the equation $\lvert K \rvert = \dfrac{1}{\lvert G_1(s_1)H_1(s_1) \rvert}$

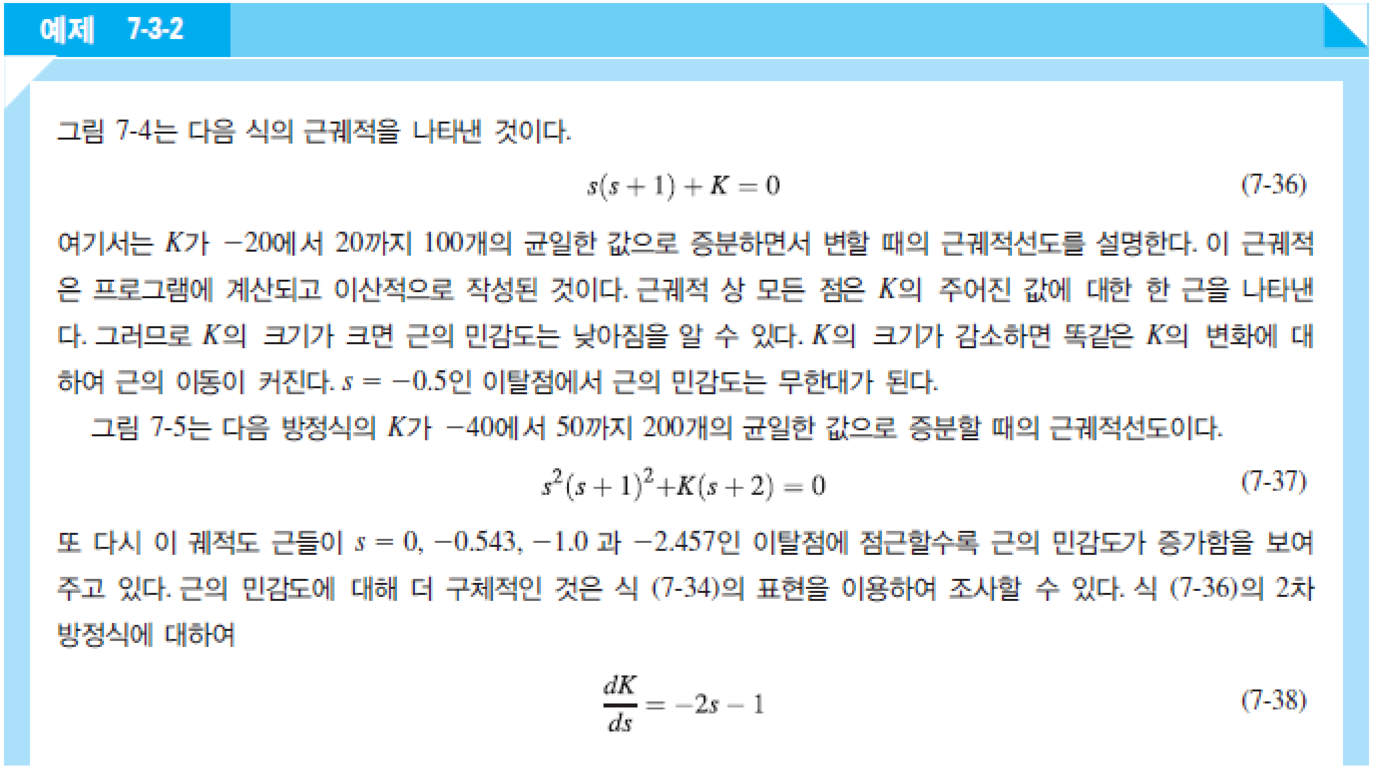
근궤적의 성질

- 근의 민감도
  - K 가 변할 때 특성방정식 근의 민감도

$$S_K = \frac{ds/s}{dK/K} = \frac{K}{s}\frac{ds}{dK} \qquad (7\text{-}35)$$

    - 이탈점에서 근의 민감도는 무한대
    - 특성방정식의 다중근 에 대응하는 이탈점에서 동작하는 K 의 값은 피해야 함
    - 시스템이 파라미터 변화에 민감하지 않아야 하는 것이 중요
    - 강인시스템(robust system)
      - 파라미터 변화에 민감하지 않은 시스템

근궤적의 성질



예제 7-3-2

그림 7-4는 다음 식의 근궤적을 나타낸 것이다.

$$s(s+1)+K=0 \tag{7-36}$$

여기서는 K가 -20에서 20까지 100개의 균일한 값으로 증분하면서 변할 때의 근궤적선도를 설명한다. 이 근궤적은 프로그램에 계산되고 이산적으로 작성된 것이다. 근궤적 상 모든 점은 K의 주어진 값에 대한 한 근을 나타낸다. 그러므로 K의 크기가 크면 근의 민감도는 낮아짐을 알 수 있다. K의 크기가 감소하면 똑같은 K의 변화에 대하여 근의 이동이 커진다. $s=-0.5$인 이탈점에서 근의 민감도는 무한대가 된다.

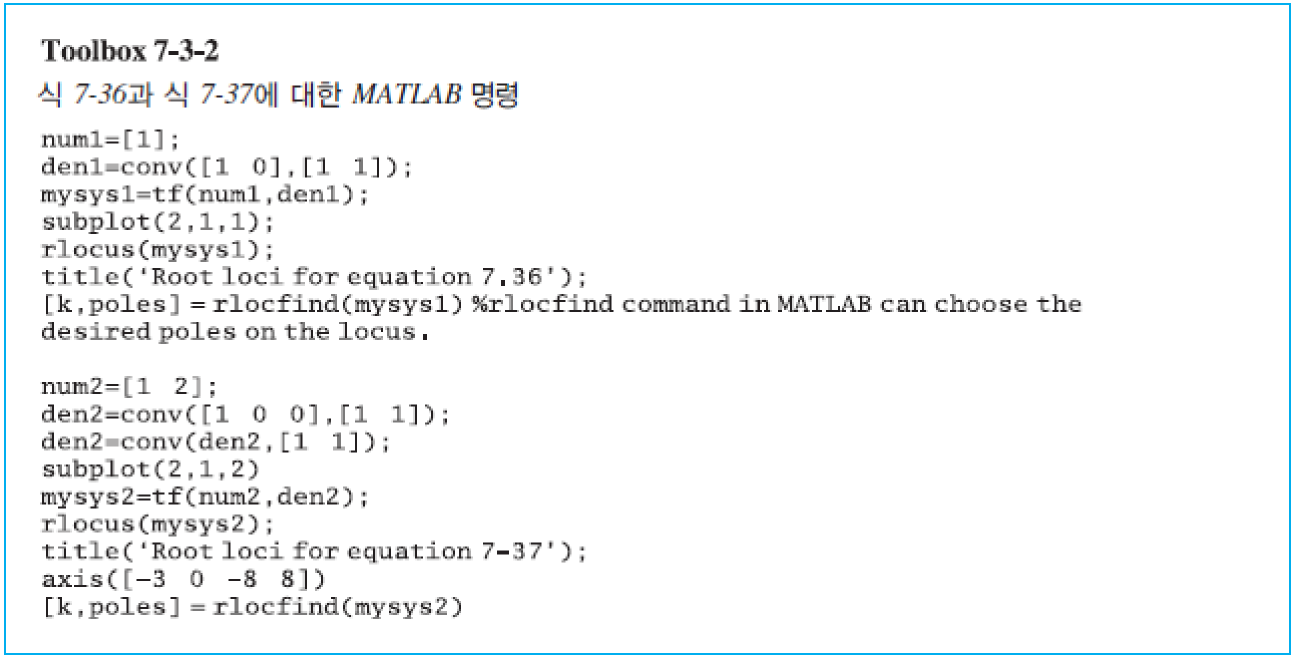
그림 7-5는 다음 방정식의 K가 -40에서 50까지 200개의 균일한 값으로 증분할 때의 근궤적선도이다.

$$s^2(s+1)^2+K(s+2)=0 \tag{7-37}$$

또 다시 이 궤적도 근들이 $s=0, -0.543, -1.0$ 과 -2.457인 이탈점에 점근할수록 근의 민감도가 증가함을 보여주고 있다. 근의 민감도에 대해 더 구체적인 것은 식 (7-34)의 표현을 이용하여 조사할 수 있다. 식 (7-36)의 2차 방정식에 대하여

$$\frac{dK}{ds}=-2s-1 \tag{7-38}$$

근궤적의 성질

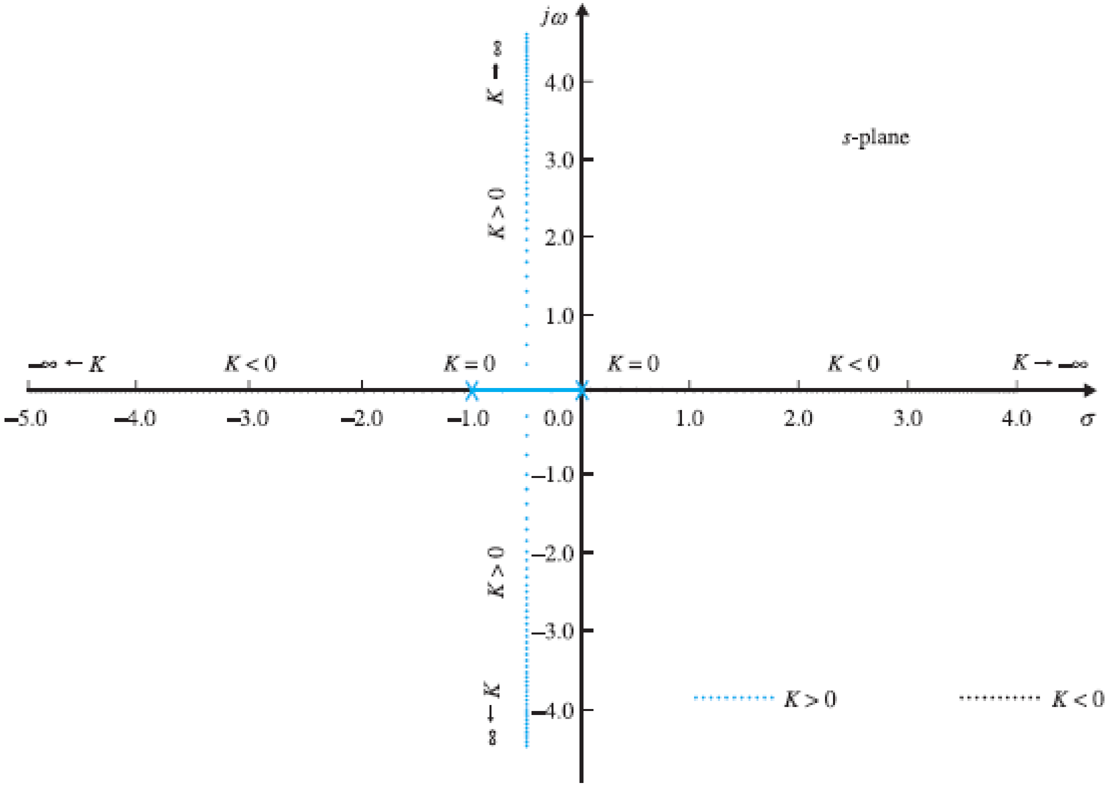


Toolbox 7-3-2

식 *7-36*과 식 *7-37*에 대한 *MATLAB* 명령

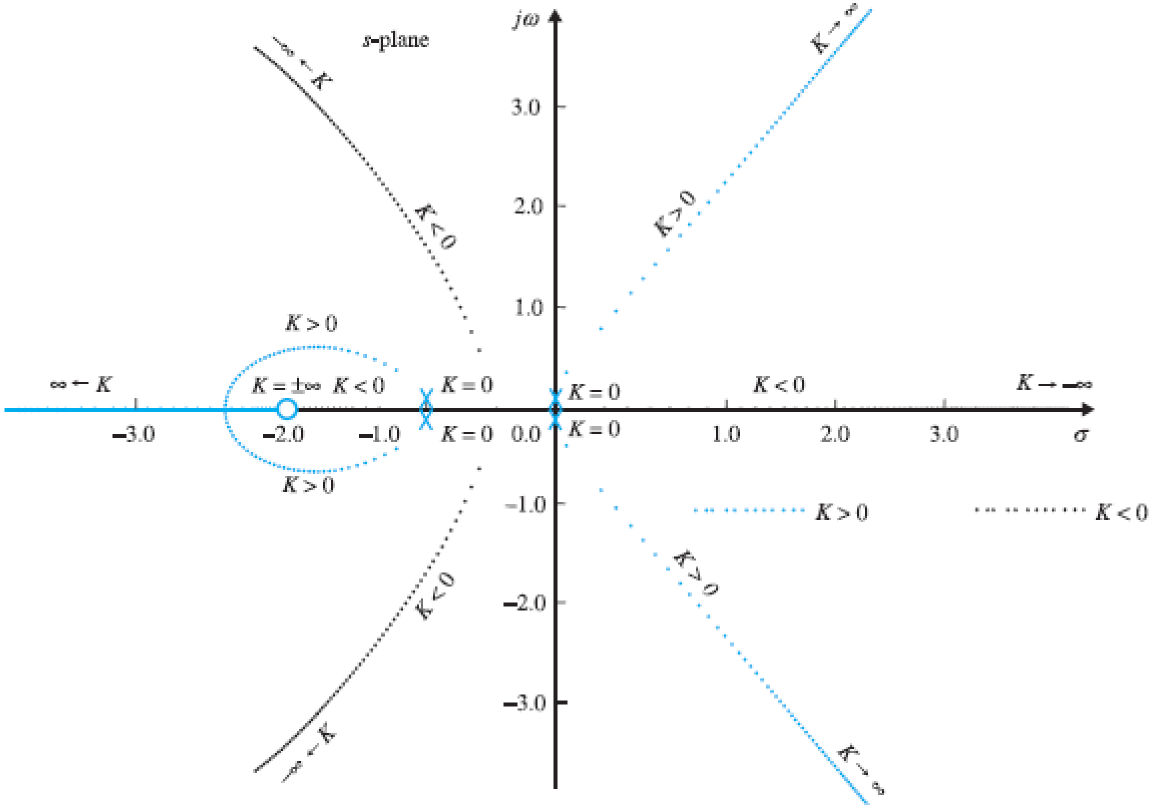
```
num1=[1];
den1=conv([1  0],[1  1]);
mysys1=tf(num1,den1);
subplot(2,1,1);
rlocus(mysys1);
title('Root loci for equation 7.36');
[k,poles] = rlocfind(mysys1) %rlocfind command in MATLAB can choose the
desired poles on the locus.

num2=[1  2];
den2=conv([1  0  0],[1  1]);
den2=conv(den2,[1  1]);
subplot(2,1,2)
mysys2=tf(num2,den2);
rlocus(mysys2);
title('Root loci for equation 7-37');
axis([-3  0  -8  8])
[k,poles] = rlocfind(mysys2)
```

근궤적의 성질



[그림 7-4] K에 대한 근의 민감도를 보여주는 $s(s + 1) + K = 0$의 근궤적.

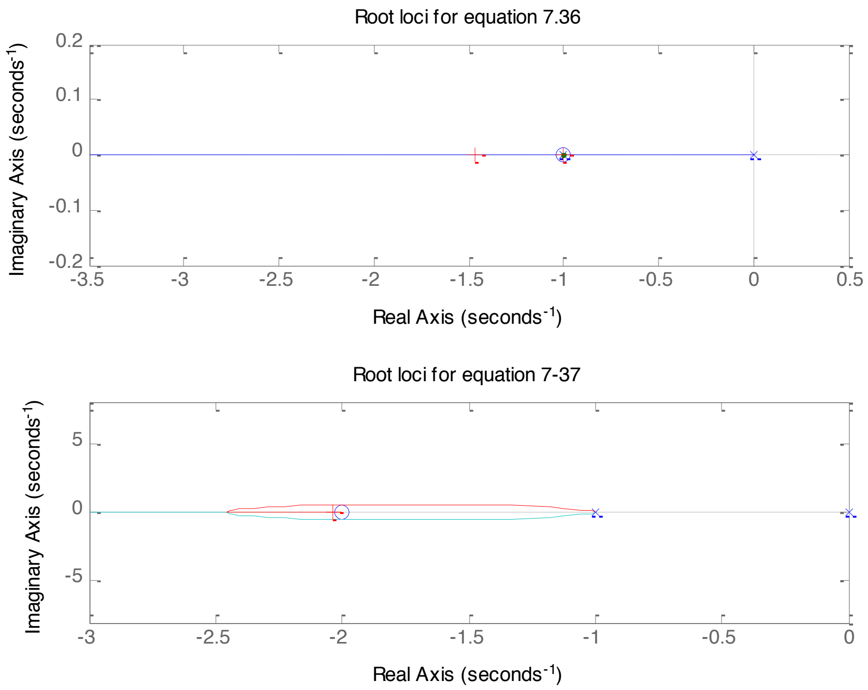
근궤적의 성질



[그림 7-5] K에 대한 근의 민감도를 보여 주는 $s^2(s+1)^2 + K(s+2) = 0$의 근궤적.

근궤적의 성질

```
%%Toolbox 7-3-2
%%식 7-36과 7-37에 대한 MATLAB 명령
num1 = [1 1];
den1 = conv([1 0], [1 1]);
mysys1 = tf(num1, den1);
subplot(2, 1, 1);
rlocus(mysys1);
title('Root loci for equation 7.36');
[k, poles] = rlocfind(mysys1);

num2 = [1 2];
den2 = conv([1 0 0], [1 1]);
den2 = conv(den2, [1 1]);
subplot(2, 1, 2);
mysys2 = tf(num2, den2);
rlocus(mysys2);
title('Root loci for equation 7-37');
axis([-3 0 -8 8]);
[k, poles] = rlocfind(mysys2);
```



근궤적의 성질

- 근의 민감도

$$s(s+1)+K=0 \Leftrightarrow K=-s(s+1)$$

$$S_K=\frac{ds}{dK}\frac{K}{s}=\frac{s+1}{2s+1}$$

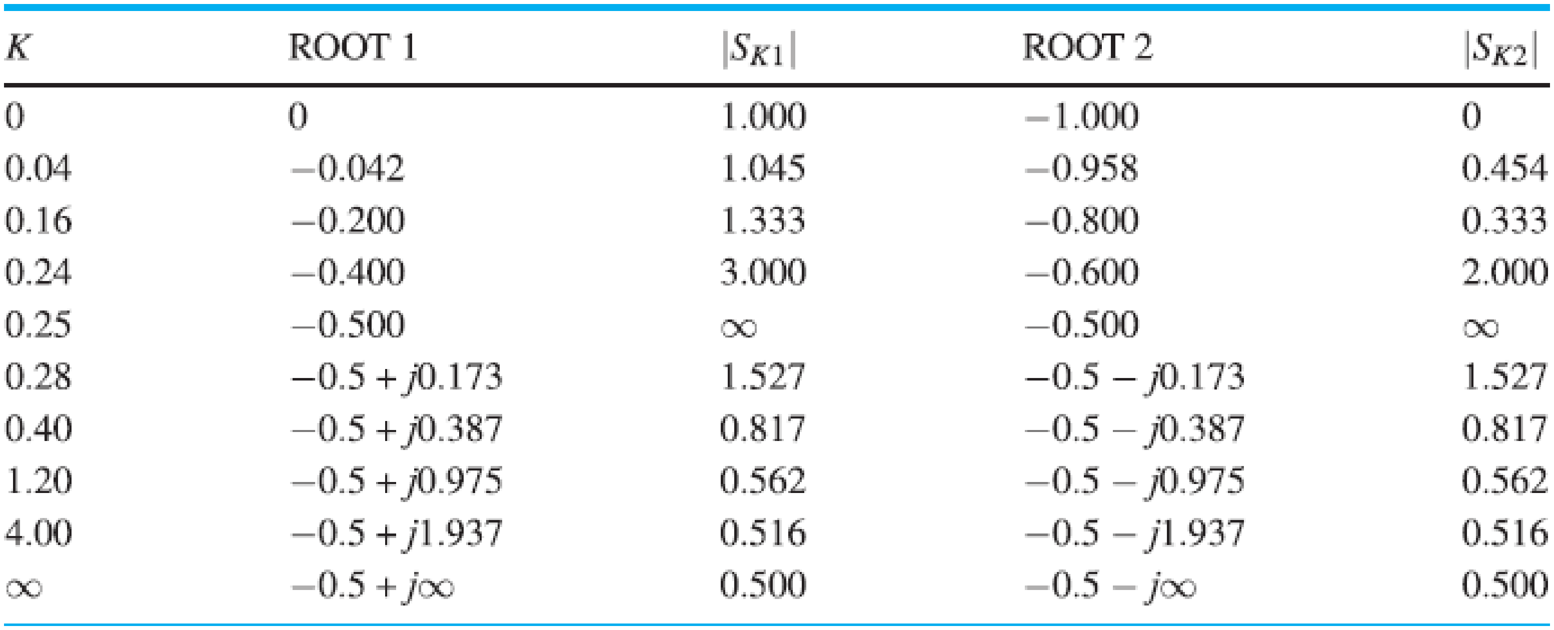
$$(s=\sigma+j\omega)$$

$$\left|S_K\right|_{\omega=0}=\left|\frac{\sigma+1}{2\sigma+1}\right|$$

$$\left|S_K\right|_{\sigma=-0.5}=\left(\frac{0.25+\omega^2}{4\omega^2}\right)^{1/2}$$

근궤적의 성질

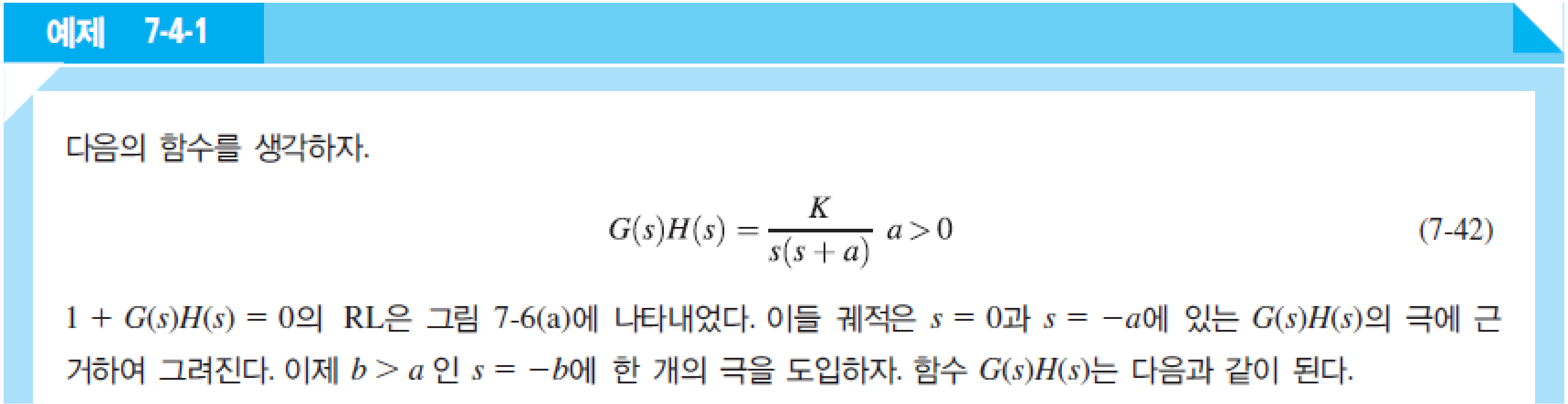
[표 7-2] 근의 민감도



K	ROOT 1	$\lvert S_{K1} \rvert$	ROOT 2	$\lvert S_{K2} \rvert$
0	0	1.000	-1.000	0
0.04	-0.042	1.045	-0.958	0.454
0.16	-0.200	1.333	-0.800	0.333
0.24	-0.400	3.000	-0.600	2.000
0.25	-0.500	∞	-0.500	∞
0.28	$-0.5 + j0.173$	1.527	$-0.5 - j0.173$	1.527
0.40	$-0.5 + j0.387$	0.817	$-0.5 - j0.387$	0.817
1.20	$-0.5 + j0.975$	0.562	$-0.5 - j0.975$	0.562
4.00	$-0.5 + j1.937$	0.516	$-0.5 - j1.937$	0.516
∞	$-0.5 + j\infty$	0.500	$-0.5 - j\infty$	0.500

근궤적 작도에 있어서 중요한 점

- $G(s)H(s)$ 에 극과 영점 추가로 인한 영향
- $G(s)H(s)$ 에 극 추가
  - 근궤적을 우반면 쪽으로 이동시키는 효과



예제 7-4-1

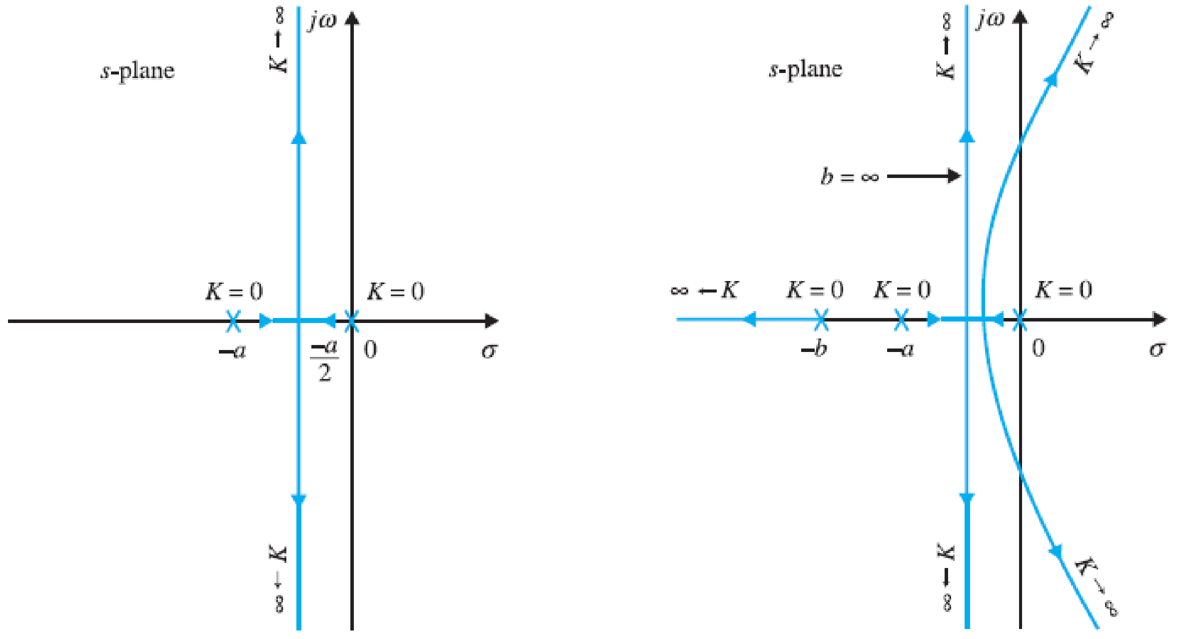
다음의 함수를 생각하자.

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+a)} \quad a > 0 \tag{7-42}$$

$1 + G(s)H(s) = 0$의 RL은 그림 7-6(a)에 나타내었다. 이들 궤적은 $s = 0$과 $s = -a$에 있는 $G(s)H(s)$의 극에 근거하여 그려진다. 이제 $b > a$ 인 $s = -b$에 한 개의 극을 도입하자. 함수 $G(s)H(s)$는 다음과 같이 된다.

근궤적 작도에 있어서 중요한 점

- $G(s)H(s)$ 에 극과 영점 추가로 인한 영향

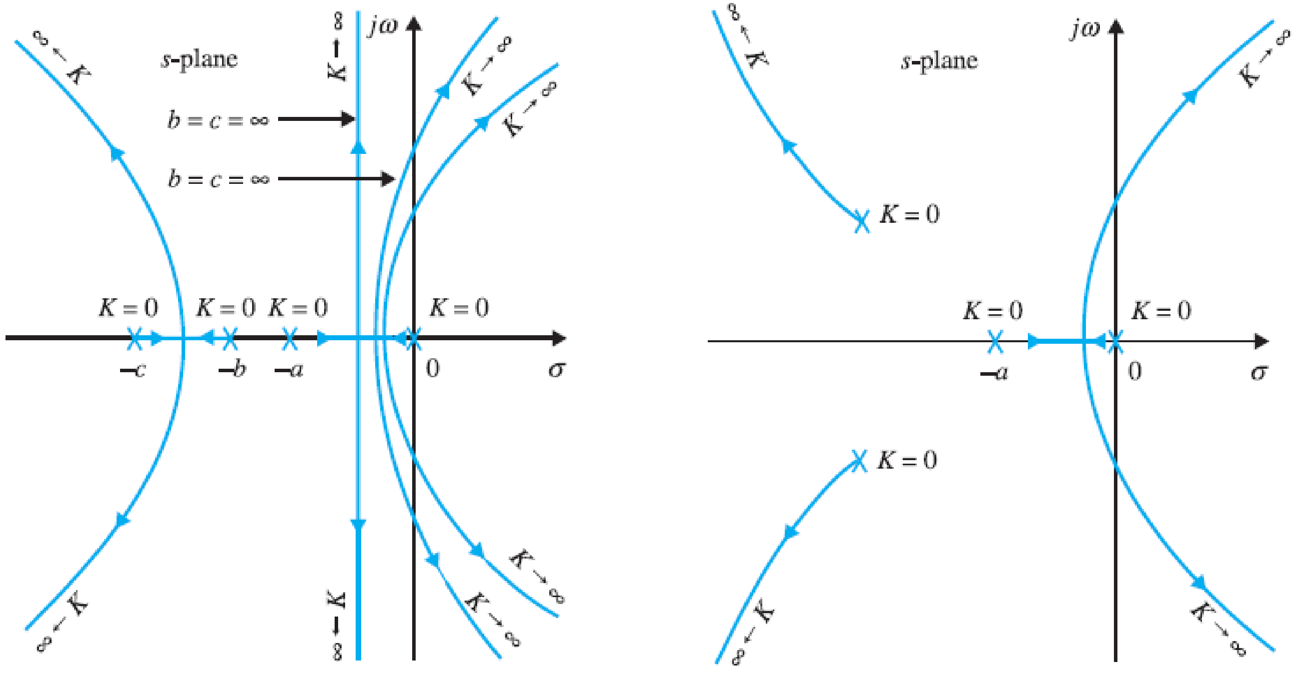


(a)
(b)

[그림 7-6] $G(s)H(s)$에 극을 추가함으로써 생기는 효과를 보여주는 근궤적선도.

근궤적 작도에 있어서 중요한 점

- $G(s)H(s)$ 에 극과 영점 추가로 인한 영향



(c)

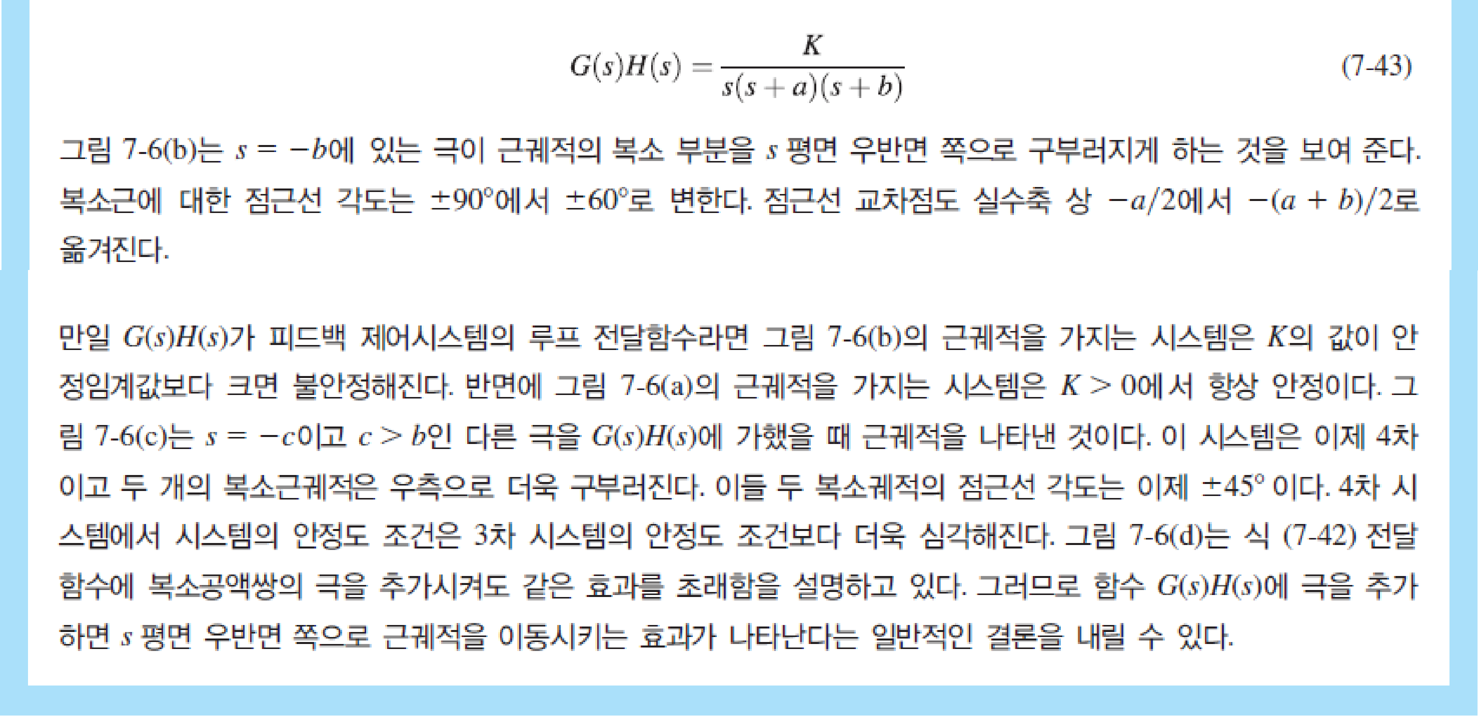
(d)

[그림 7-6] $G(s)H(s)$에 극을 추가함으로써 생기는 효과를 보여주는 근궤적선도.

경희대학교 Kyung Hee University

근궤적 작도에 있어서 중요한 점

- $G(s)H(s)$ 에 극과 영점 추가로 인한 영향



$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+a)(s+b)} \qquad (7\text{-}43)$$

그림 7-6(b)는 $s = -b$에 있는 극이 근궤적의 복소 부분을 s 평면 우반면 쪽으로 구부러지게 하는 것을 보여 준다. 복소근에 대한 점근선 각도는 ±90°에서 ±60°로 변한다. 점근선 교차점도 실수축 상 $-a/2$에서 $-(a + b)/2$로 옮겨진다.

만일 $G(s)H(s)$가 피드백 제어시스템의 루프 전달함수라면 그림 7-6(b)의 근궤적을 가지는 시스템은 K의 값이 안정임계값보다 크면 불안정해진다. 반면에 그림 7-6(a)의 근궤적을 가지는 시스템은 $K > 0$에서 항상 안정이다. 그림 7-6(c)는 $s = -c$이고 $c > b$인 다른 극을 $G(s)H(s)$에 가했을 때 근궤적을 나타낸 것이다. 이 시스템은 이제 4차이고 두 개의 복소근궤적은 우측으로 더욱 구부러진다. 이들 두 복소궤적의 점근선 각도는 이제 ±45° 이다. 4차 시스템에서 시스템의 안정도 조건은 3차 시스템의 안정도 조건보다 더욱 심각해진다. 그림 7-6(d)는 식 (7-42) 전달함수에 복소공액쌍의 극을 추가시켜도 같은 효과를 초래함을 설명하고 있다. 그러므로 함수 $G(s)H(s)$에 극을 추가하면 s 평면 우반면 쪽으로 근궤적을 이동시키는 효과가 나타난다는 일반적인 결론을 내릴 수 있다.

근궤적 작도에 있어서 중요한 점

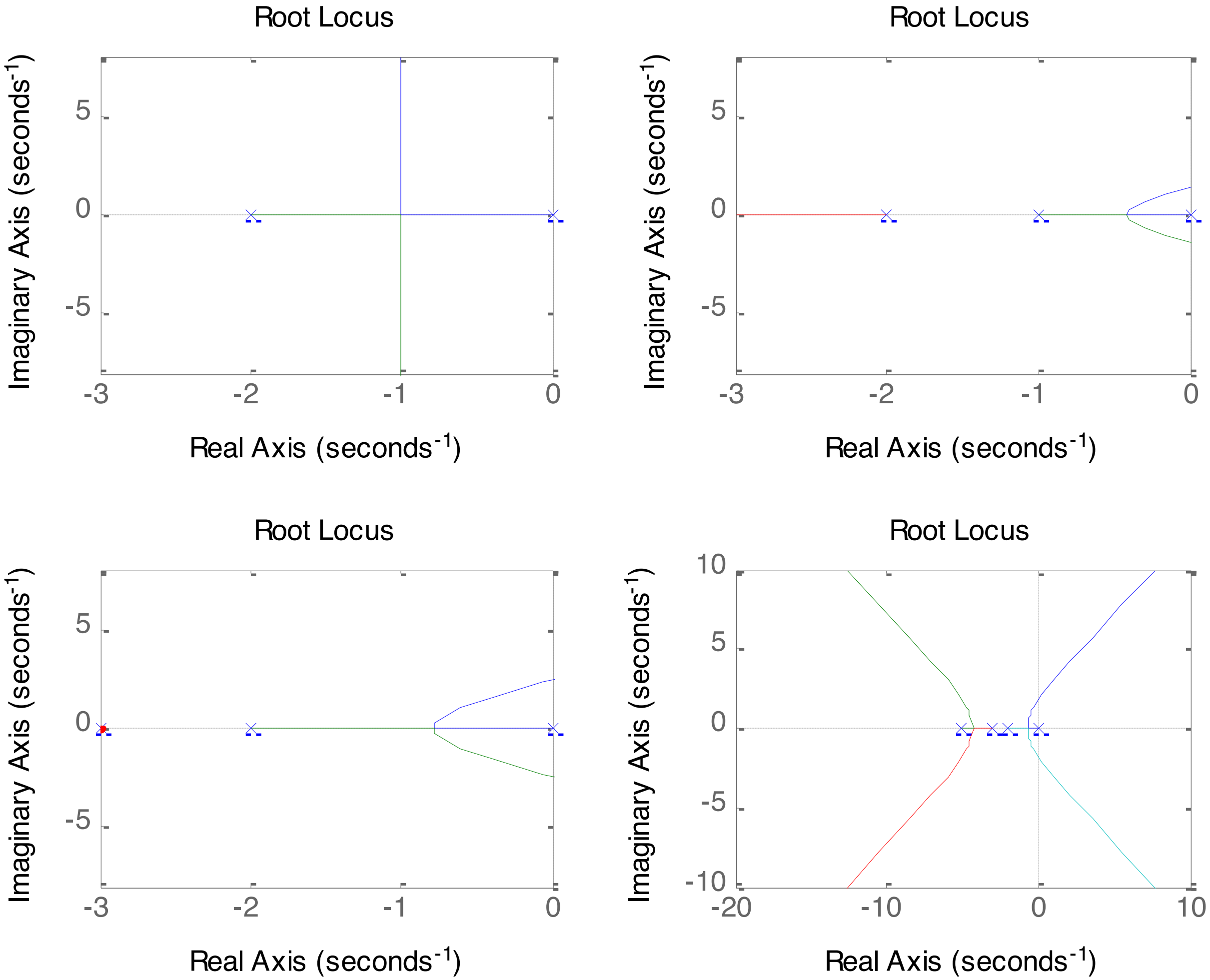
- $G(s)H(s)$ 에 극과 영점 추가로 인한 영향

```
%%Toolbox 7-4-1
%%식 7-6을 위한 MATLAB 명령
a = 2; b = 3; c = 5;
num4 = [1];
den4 = conv([1 0], [1 a]);
subplot(221);
mysys4 = tf(num4, den4);
rlocus(mysys4);
axis([-3 0 -8 8]);

num3 = [1];
den3 = conv([1 0], conv([1 a], [1 a/2]));
subplot(222);
mysys3 = tf(num3, den3);
rlocus(mysys3);
axis([-3 0 -8 8]);
```

```
num2 = [1];
den2 = conv([1 0], conv([1 a], [1 b]));
subplot(223);
mysys2 = tf(num2, den2);
rlocus(mysys2);
axis([-3 0 -8 8]);

num1 = [1];
den1 = conv([1 0], conv([1 a], [1 b]));
den1 = conv(den1, [1 c]);
subplot(224);
mysys1 = tf(num1, den1);
rlocus(mysys1);
```

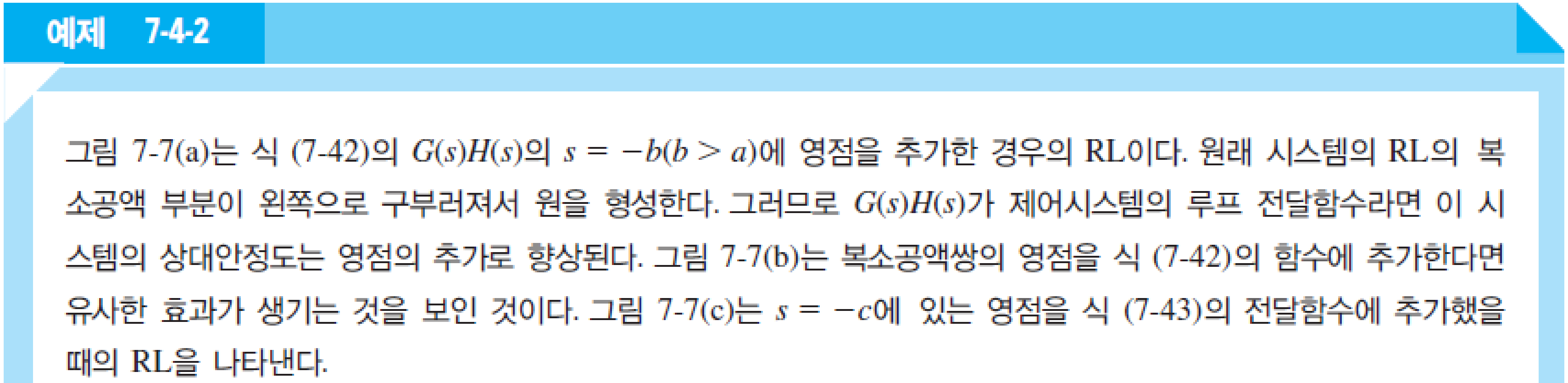
근궤적 작도에 있어서 중요한 점

- $G(s)H(s)$ 에 극과 영점 추가로 인한 영향



근궤적 작도에 있어서 중요한 점

- $G(s)H(s)$ 에 극과 영점 추가로 인한 영향
- $G(s)H(s)$ 에 영점 추가
  - 근궤적을 좌반면 쪽으로 구부리고 이동

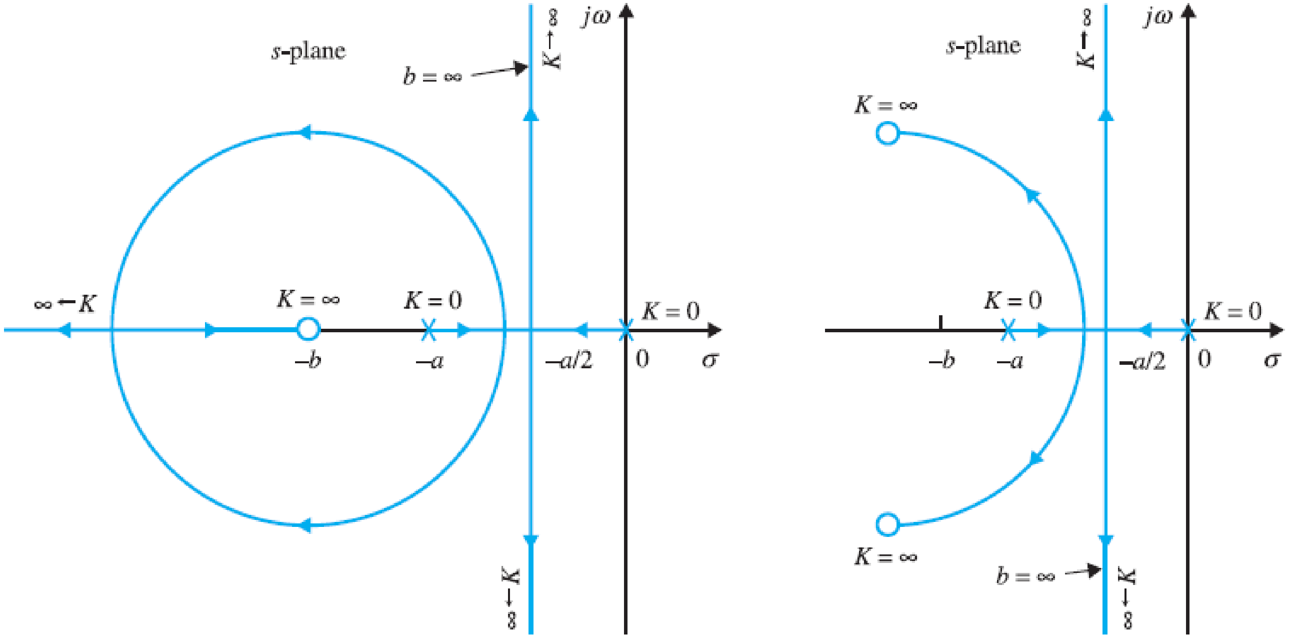


예제 7-4-2

그림 7-7(a)는 식 (7-42)의 $G(s)H(s)$의 $s = -b(b > a)$에 영점을 추가한 경우의 RL이다. 원래 시스템의 RL의 복소공액 부분이 왼쪽으로 구부러져서 원을 형성한다. 그러므로 $G(s)H(s)$가 제어시스템의 루프 전달함수라면 이 시스템의 상대안정도는 영점의 추가로 향상된다. 그림 7-7(b)는 복소공액쌍의 영점을 식 (7-42)의 함수에 추가한다면 유사한 효과가 생기는 것을 보인 것이다. 그림 7-7(c)는 $s = -c$에 있는 영점을 식 (7-43)의 전달함수에 추가했을 때의 RL을 나타낸다.

근궤적 작도에 있어서 중요한 점

- $G(s)H(s)$ 에 극과 영점 추가로 인한 영향

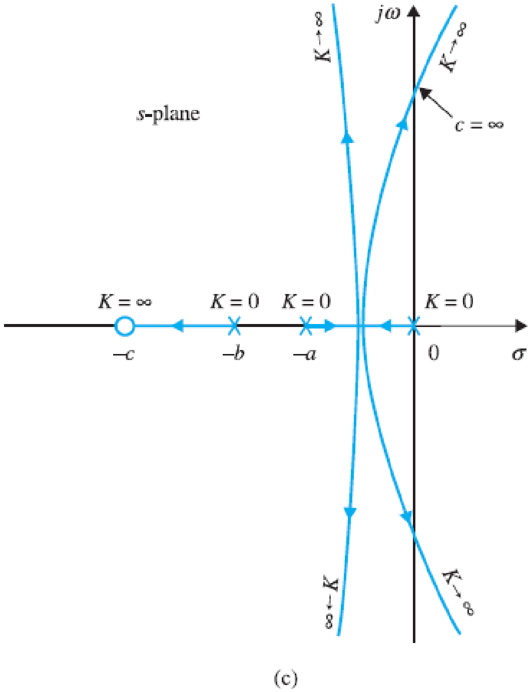


(a) (b)

[그림 7-7] $G(s)H(s)$에 영점 추가로 생기는 효과를 보여주는 근궤적선도.

근궤적 작도에 있어서 중요한 점

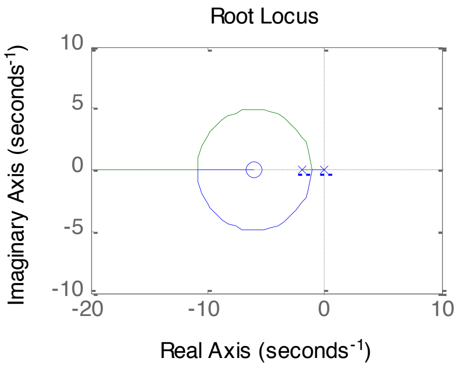
- $G(s)H(s)$ 에 극과 영점 추가로 인한 영향

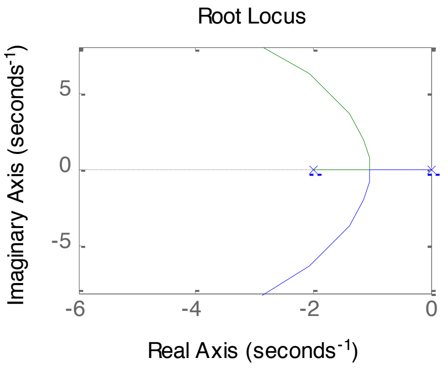


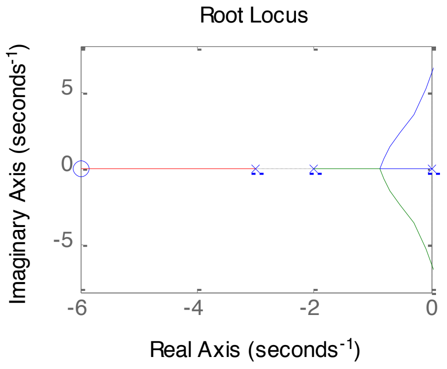
[그림 7-7] $G(s)H(s)$에 영점 추가로 생기는 효과를 보여주는 근궤적선도.

근궤적 작도에 있어서 중요한 점

- $G(s)H(s)$ 에 극과 영점 추가로 인한 영향







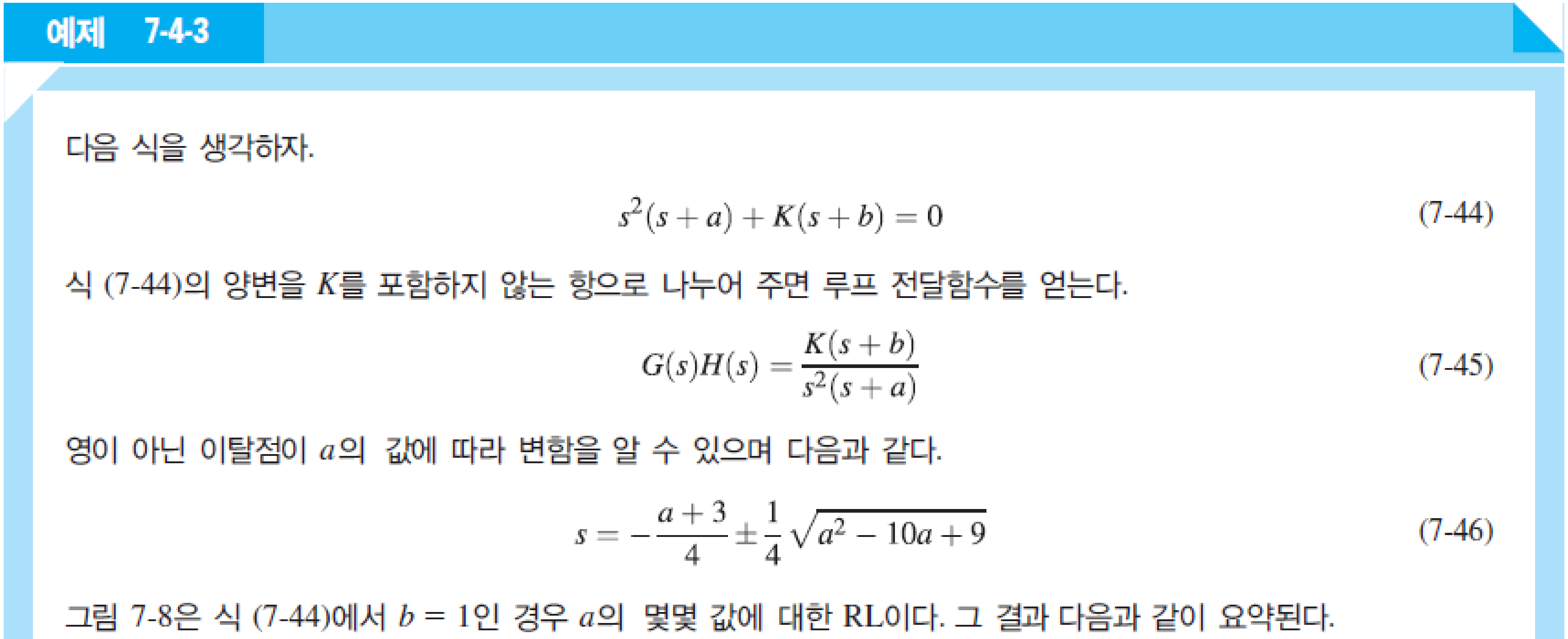
```
%%Toolbox 7-4-2
%%그림 7-7을 위한 MATLAB 명령
a = 2; b = 3; c = 20; d = 6;
num4 = [1 d];
den4 = conv([1 0], [1 a]);
subplot(221);
mysys4 = tf(num4, den4);
rlocus(mysys4);
```

```
num3 = [1 c];
den3 = conv([1 0],[1 a]);
subplot(222);
mysys3 = tf(num3, den3);
rlocus(mysys3);
axis([-6 0 -8 8]);
```

```
num2 = [1 d];
den2 = conv([1 0], conv([1 a], [1
b]));
subplot(223);
mysys2=tf(num2, den2);
rlocus(mysys2);
axis([-6 0 -8 8]);
```

근궤적 작도에 있어서 중요한 점

- $G(s)H(s)$ 에 극과 영점 추가로 인한 영향



예제 7-4-3

다음 식을 생각하자.

$$s^2(s+a)+K(s+b)=0 \tag{7-44}$$

식 (7-44)의 양변을 K를 포함하지 않는 항으로 나누어 주면 루프 전달함수를 얻는다.

$$G(s)H(s)=\frac{K(s+b)}{s^2(s+a)} \tag{7-45}$$

영이 아닌 이탈점이 a의 값에 따라 변함을 알 수 있으며 다음과 같다.

$$s=-\frac{a+3}{4}\pm\frac{1}{4}\sqrt{a^2-10a+9} \tag{7-46}$$

그림 7-8은 식 (7-44)에서 $b=1$인 경우 a의 몇몇 값에 대한 RL이다. 그 결과 다음과 같이 요약된다.

근궤적 작도에 있어서 중요한 점

- $G(s)H(s)$ 에 극과 영점 추가로 인한 영향

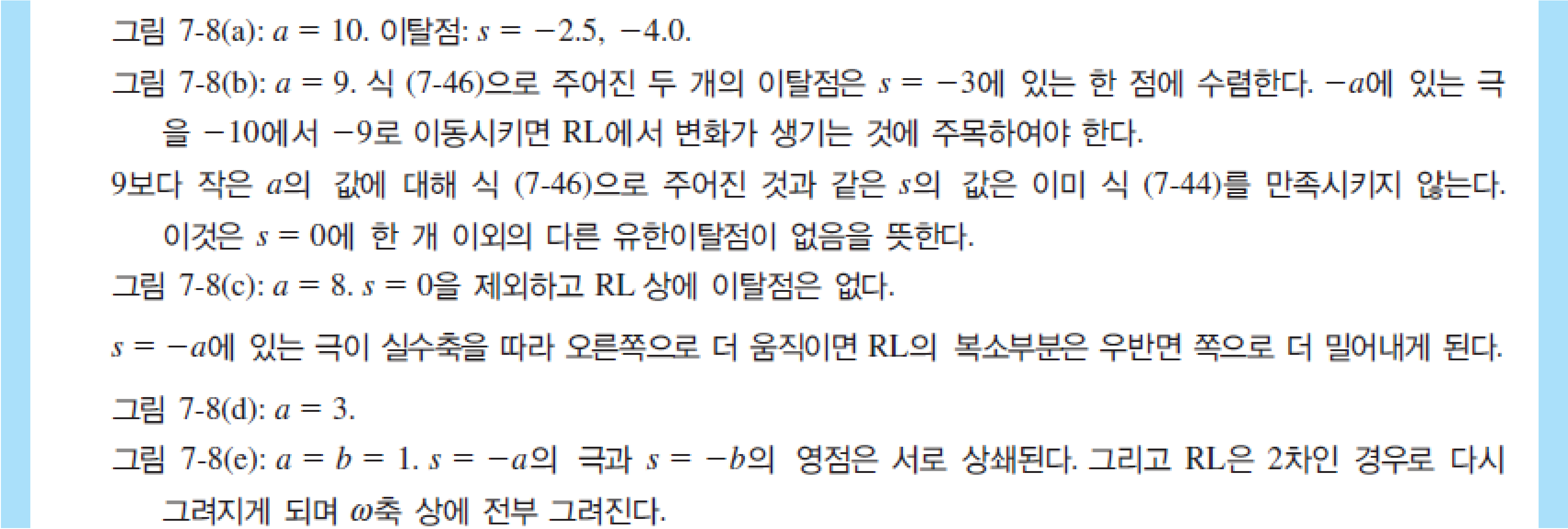


그림 7-8(a): $a = 10$. 이탈점: $s = -2.5,\ -4.0$.

그림 7-8(b): $a = 9$. 식 (7-46)으로 주어진 두 개의 이탈점은 $s = -3$에 있는 한 점에 수렴한다. $-a$에 있는 극을 -10에서 -9로 이동시키면 RL에서 변화가 생기는 것에 주목하여야 한다.

9보다 작은 a의 값에 대해 식 (7-46)으로 주어진 것과 같은 s의 값은 이미 식 (7-44)를 만족시키지 않는다. 이것은 $s = 0$에 한 개 이외의 다른 유한이탈점이 없음을 뜻한다.

그림 7-8(c): $a = 8$. $s = 0$을 제외하고 RL 상에 이탈점은 없다.

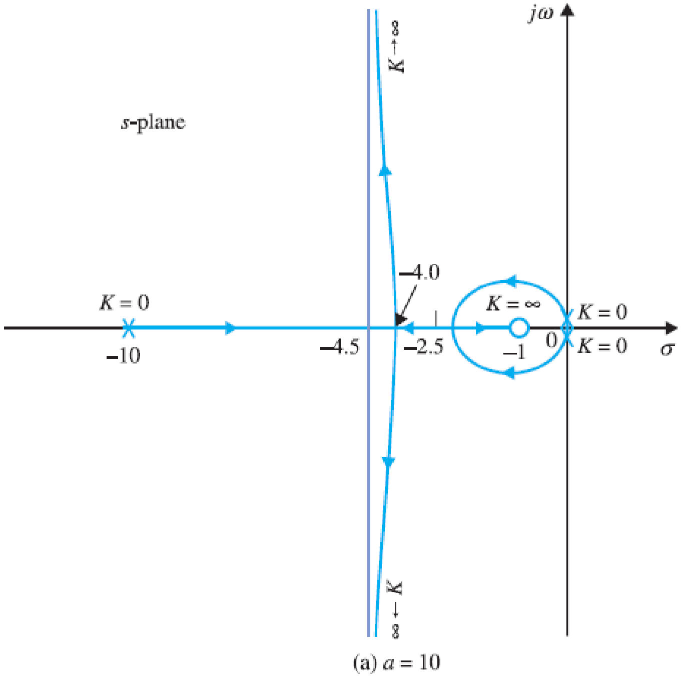
$s = -a$에 있는 극이 실수축을 따라 오른쪽으로 더 움직이면 RL의 복소부분은 우반면 쪽으로 더 밀어내게 된다.

그림 7-8(d): $a = 3$.

그림 7-8(e): $a = b = 1$. $s = -a$의 극과 $s = -b$의 영점은 서로 상쇄된다. 그리고 RL은 2차인 경우로 다시 그려지게 되며 ω축 상에 전부 그려진다.

근궤적 작도에 있어서 중요한 점

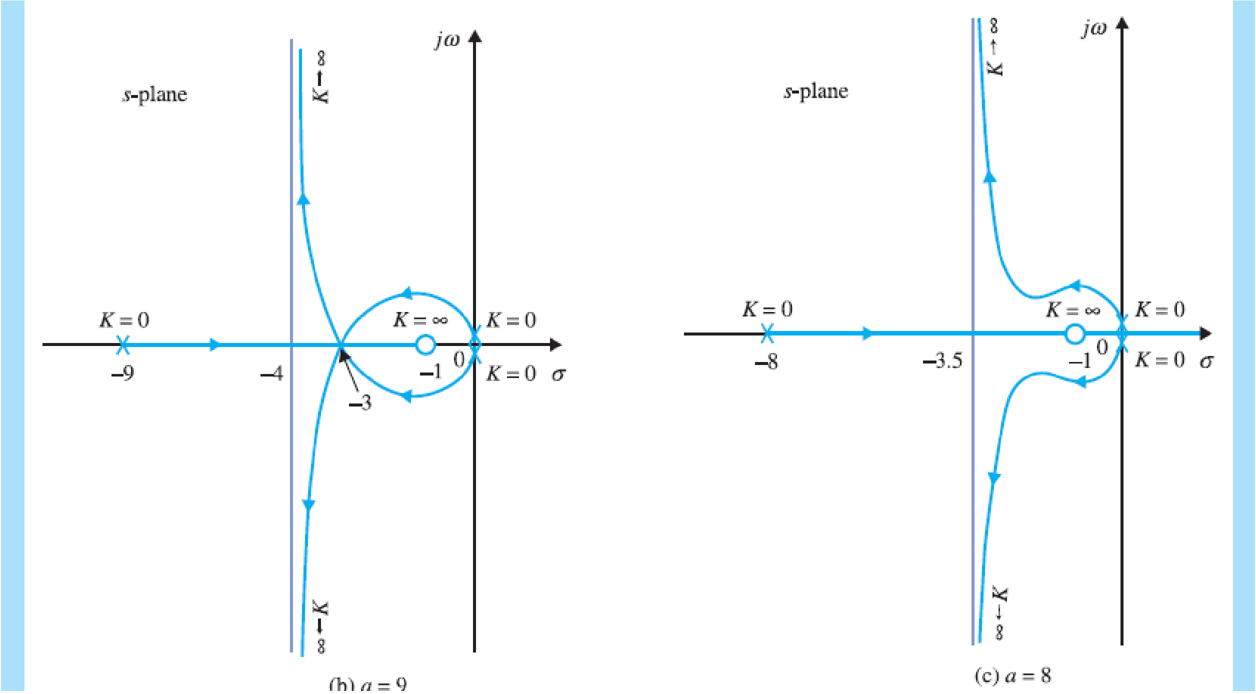
- $G(s)H(s)$ 에 극과 영점 추가로 인한 영향



[그림 7-8] $G(s)H(s)$의 극 이동의 효과를 보여주는 근궤적. $G(s)H(s) = K(s+1)/[s^2(s+a)]$.

근궤적 작도에 있어서 중요한 점

- $G(s)H(s)$ 에 극과 영점 추가로 인한 영향

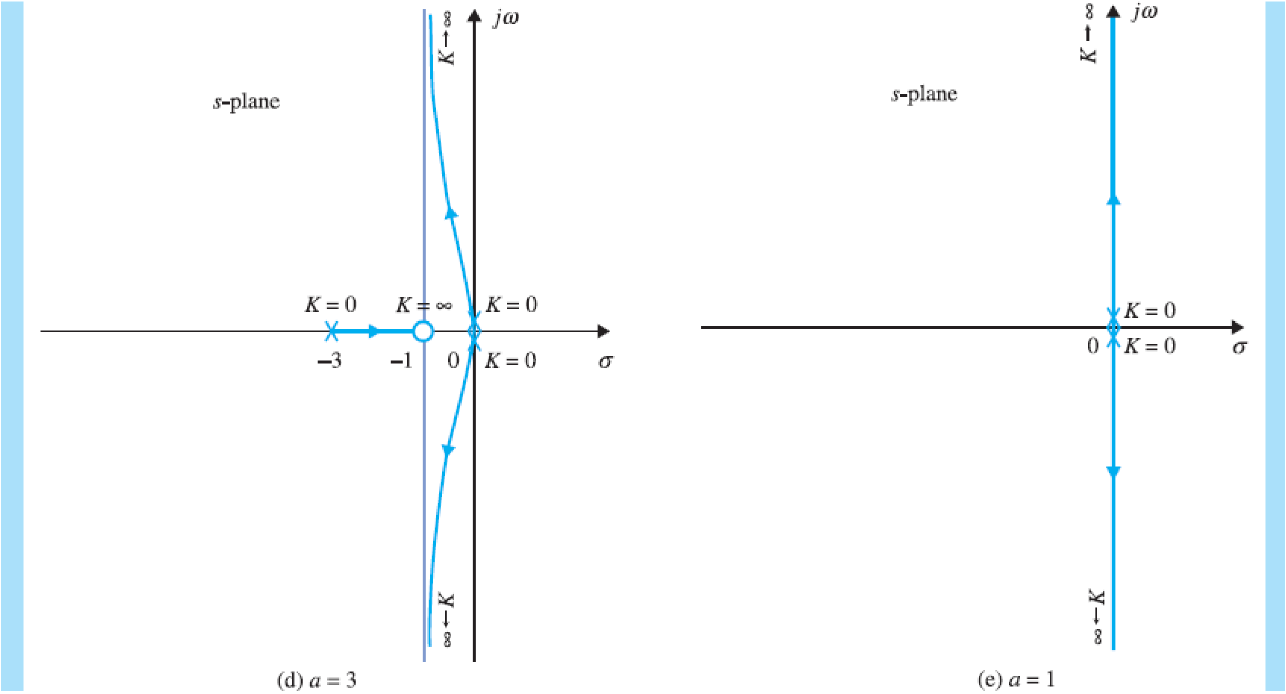


(b) $a = 9$ (c) $a = 8$

[그림 7-8] $G(s)H(s)$의 극 이동의 효과를 보여주는 근궤적. $G(s)H(s) = K(s + 1)/[s^2(s+a)]$.

근궤적 작도에 있어서 중요한 점

- $G(s)H(s)$ 에 극과 영점 추가로 인한 영향

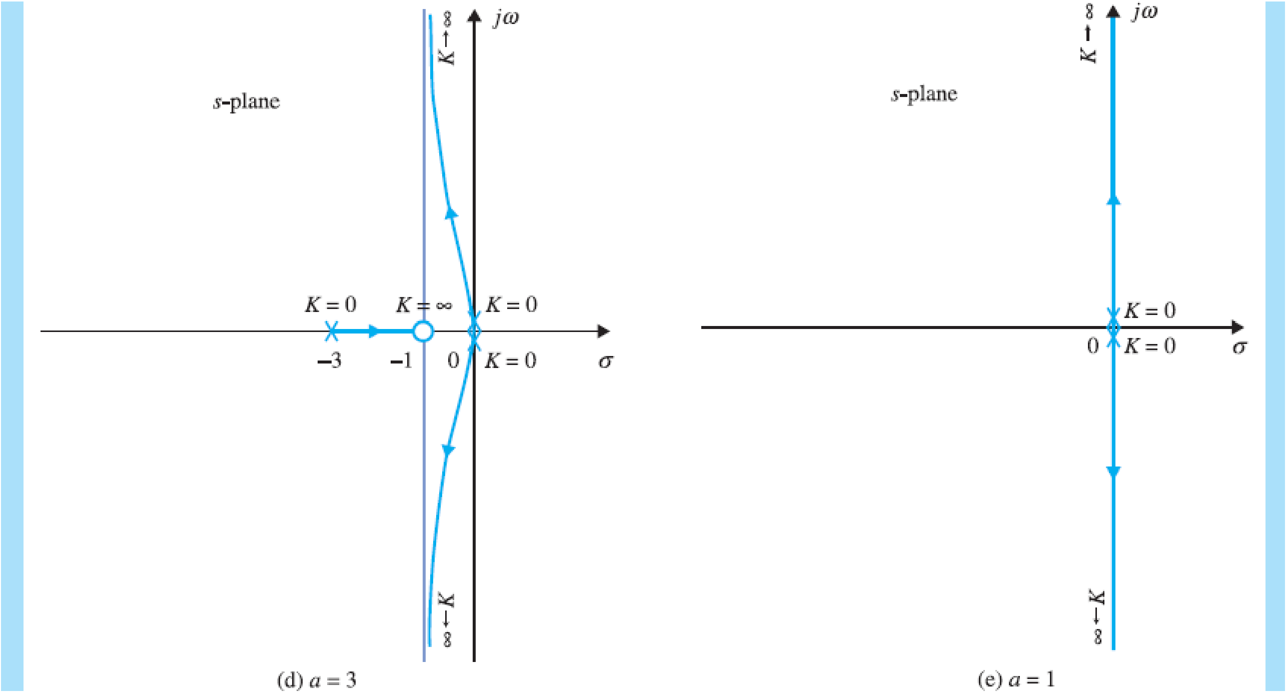


(d) $a = 3$ (e) $a = 1$

[그림 7-8] $G(s)H(s)$의 극 이동의 효과를 보여주는 근궤적. $G(s)H(s) = K(s+1)/[s^2(s+a)]$.

근궤적 작도에 있어서 중요한 점

- $G(s)H(s)$ 에 극과 영점 추가로 인한 영향



(d) $a = 3$ (e) $a = 1$

[그림 7-8] $G(s)H(s)$의 극 이동의 효과를 보여주는 근궤적. $G(s)H(s) = K(s+1)/[s^2(s+a)]$.

근궤적 작도에 있어서 중요한 점

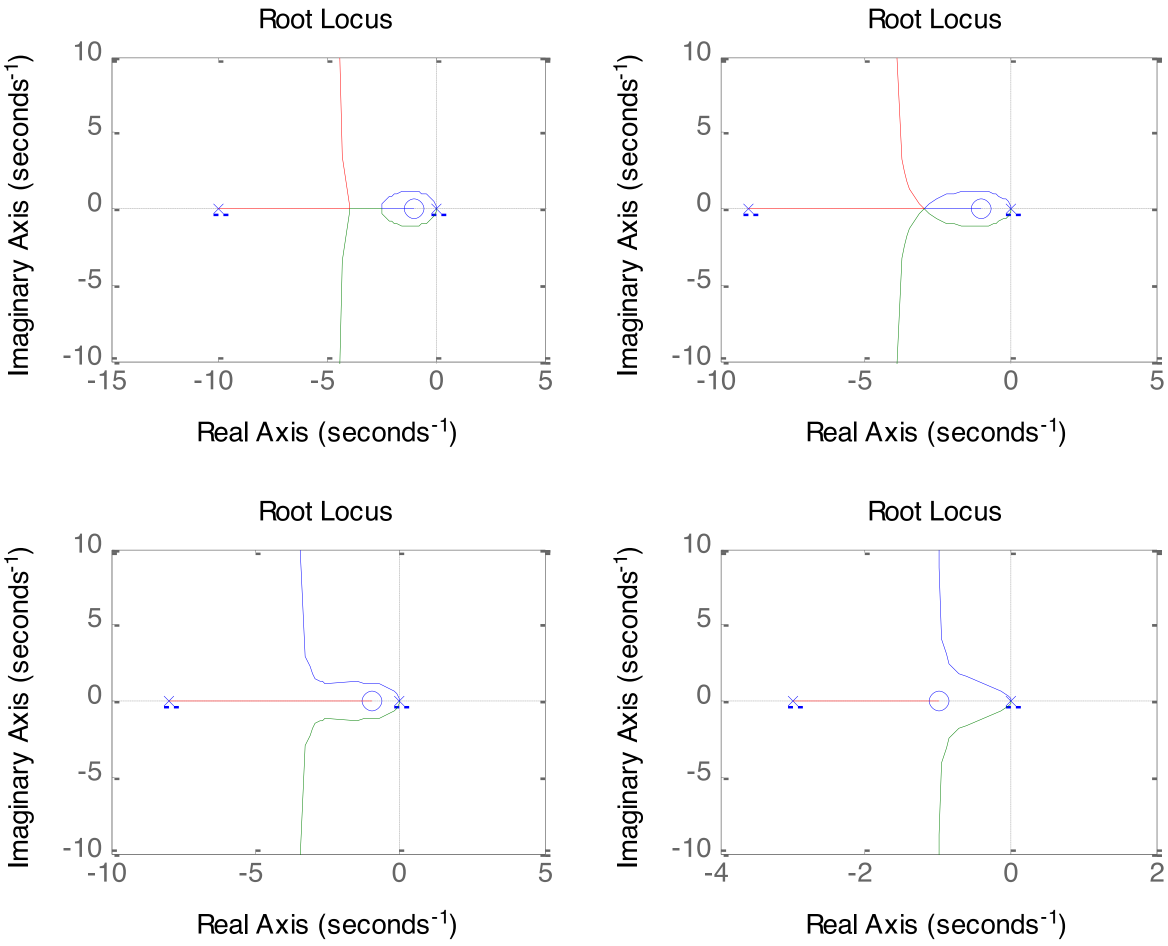
- $G(s)H(s)$ 에 극과 영점 추가로 인한 영향

```
%%Toolbox 7-4-3
%%그림 7-8을 위한 MATLAB 명령
a1 = 10; a2 = 9; a3 = 8; a4 = 3; b = 1;
num1 = [1 b];
den1 = conv([1 0 0], [1 a1]);
subplot(221);
mysys1=tf(num1, den1);
rlocus(mysys1);

num2 = [1 b];
den2 = conv([1 0 0], [1 a2]);
subplot(222);
mysys2 = tf(num2, den2);
rlocus(mysys2);
```

```
num3 = [1 b];
den3 = conv([1 0 0], [1 a3]);
subplot(223);
mysys3 = tf(num3, den3);
rlocus(mysys3);
num4 = [1 b];
den4 = conv([1 0 0], [1 a4]);
subplot(224);
mysys4 = tf(num4, den4);
rlocus(mysys4);
```

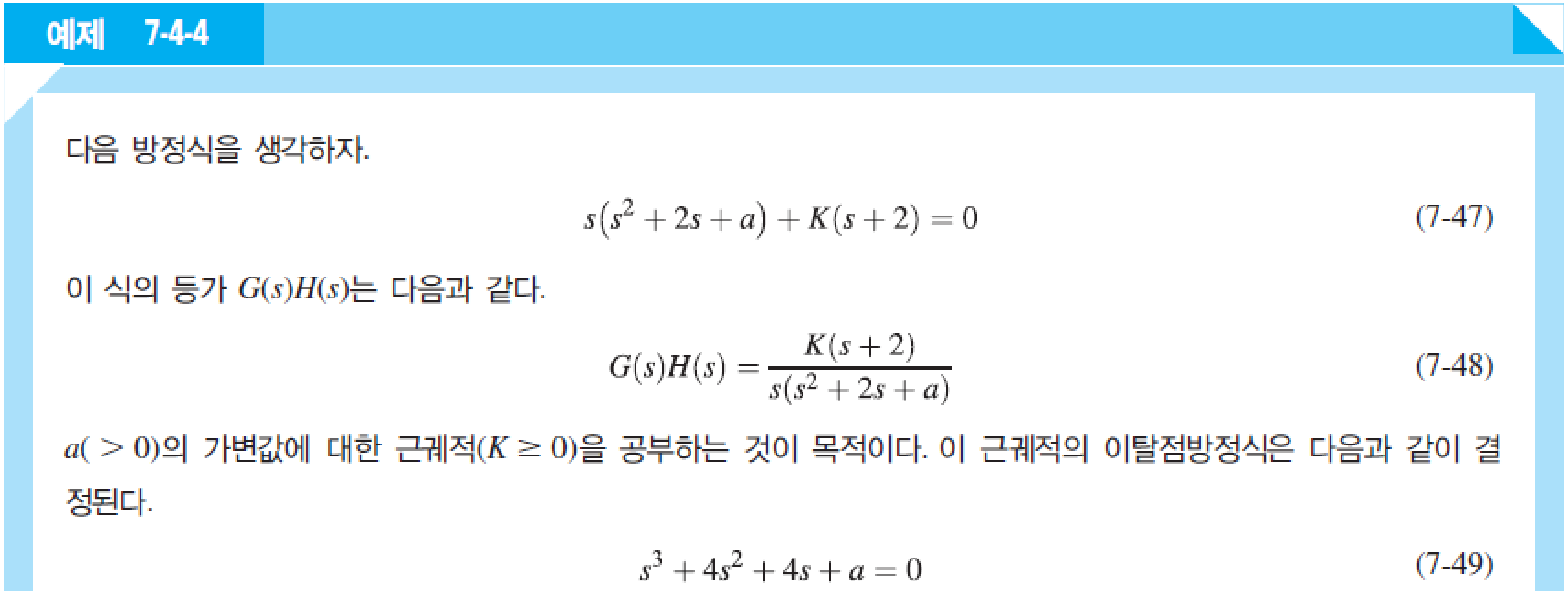
근궤적 작도에 있어서 중요한 점

- $G(s)H(s)$ 에 극과 영점 추가로 인한 영향



근궤적 작도에 있어서 중요한 점

- $G(s)H(s)$ 에 극과 영점 추가로 인한 영향



예제 7-4-4

다음 방정식을 생각하자.

$$s(s^2 + 2s + a) + K(s + 2) = 0 \tag{7-47}$$

이 식의 등가 $G(s)H(s)$는 다음과 같다.

$$G(s)H(s) = \frac{K(s + 2)}{s(s^2 + 2s + a)} \tag{7-48}$$

$a(>0)$의 가변값에 대한 근궤적($K \geq 0$)을 공부하는 것이 목적이다. 이 근궤적의 이탈점방정식은 다음과 같이 결정된다.

$$s^3 + 4s^2 + 4s + a = 0 \tag{7-49}$$

근궤적 작도에 있어서 중요한 점

- $G(s)H(s)$ 에 극과 영점 추가로 인한 영향

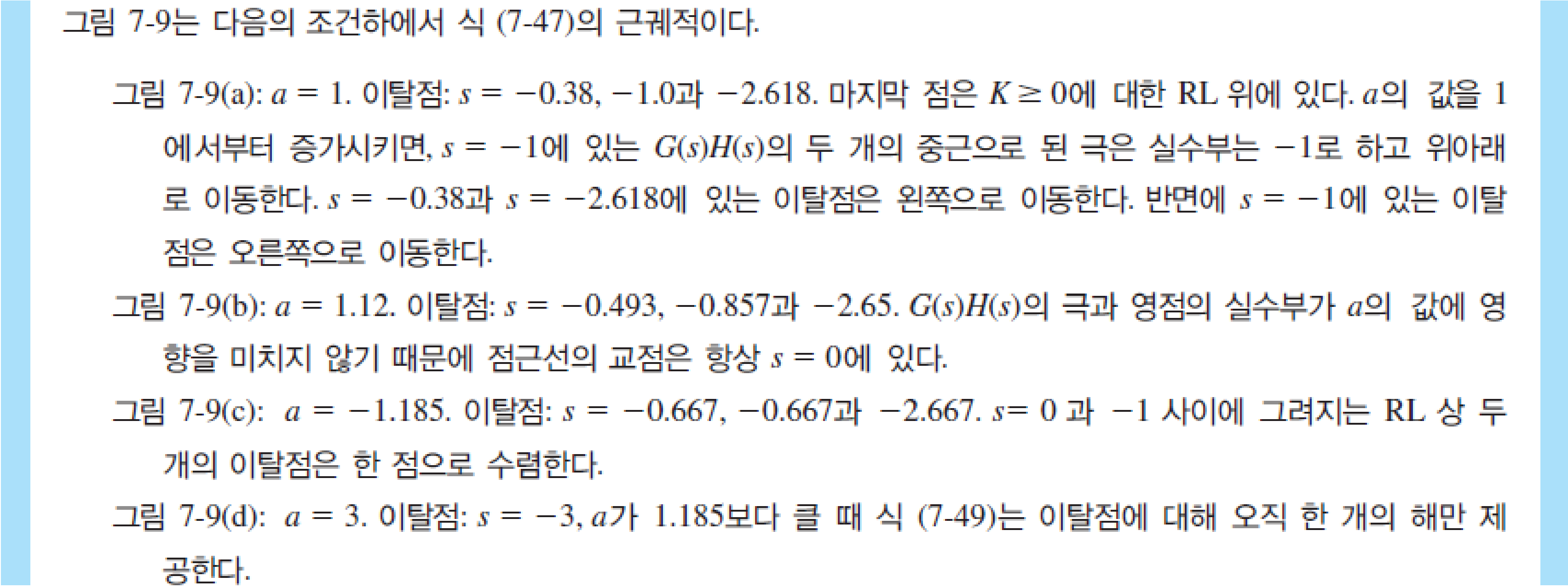


그림 7-9는 다음의 조건하에서 식 (7-47)의 근궤적이다.

그림 7-9(a): $a = 1$. 이탈점: $s = -0.38, -1.0$과 -2.618. 마지막 점은 $K \geq 0$에 대한 RL 위에 있다. a의 값을 1에서부터 증가시키면, $s = -1$에 있는 $G(s)H(s)$의 두 개의 중근으로 된 극은 실수부는 -1로 하고 위아래로 이동한다. $s = -0.38$과 $s = -2.618$에 있는 이탈점은 왼쪽으로 이동한다. 반면에 $s = -1$에 있는 이탈점은 오른쪽으로 이동한다.

그림 7-9(b): $a = 1.12$. 이탈점: $s = -0.493, -0.857$과 -2.65. $G(s)H(s)$의 극과 영점의 실수부가 a의 값에 영향을 미치지 않기 때문에 점근선의 교점은 항상 $s = 0$에 있다.

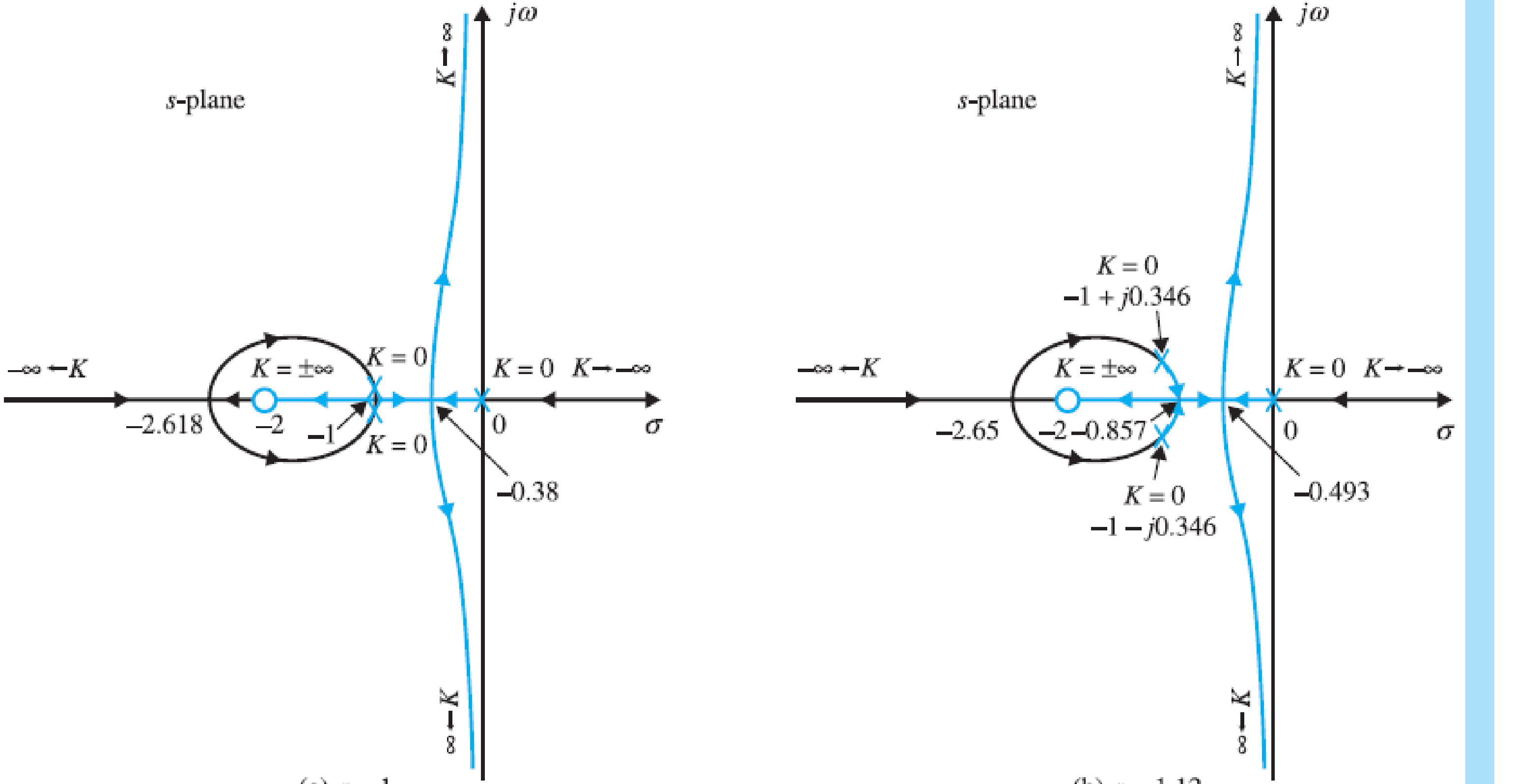
그림 7-9(c): $a = -1.185$. 이탈점: $s = -0.667, -0.667$과 -2.667. $s= 0$ 과 -1 사이에 그려지는 RL 상 두 개의 이탈점은 한 점으로 수렴한다.

그림 7-9(d): $a = 3$. 이탈점: $s = -3$, a가 1.185보다 클 때 식 (7-49)는 이탈점에 대해 오직 한 개의 해만 제공한다.

근궤적 작도에 있어서 중요한 점

- $G(s)H(s)$ 에 극과 영점 추가로 인한 영향

독자들은 그림 7-9(c)와 7-9(d)의 근궤적 사이의 차이를 조사하고 a의 값이 1.185에서 3으로 또 그 이상으로 점진적으로 변할 때 궤적의 변화를 완성하여야 한다.

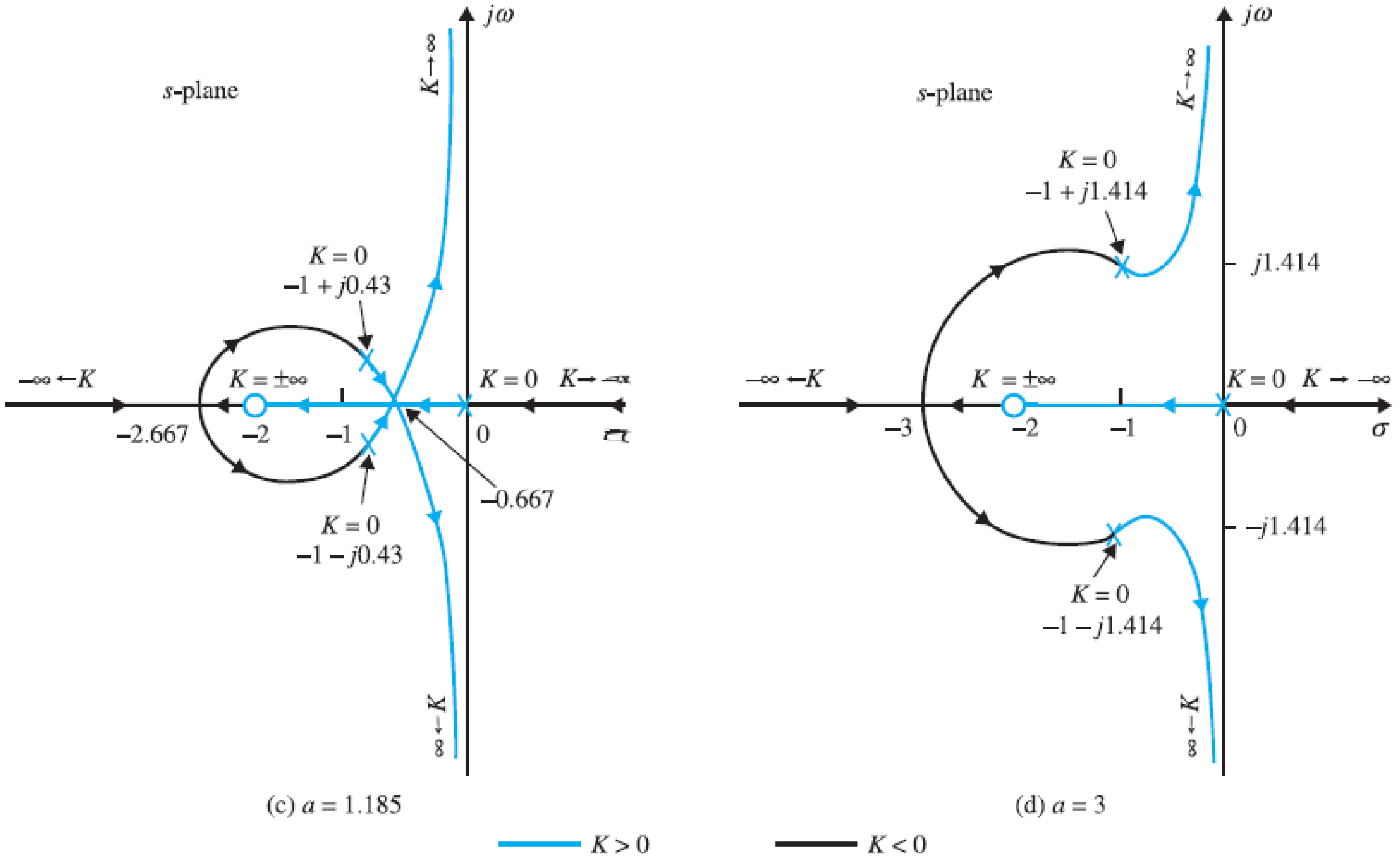


(a) $a = 1$　　　(b) $a = 1.12$

[그림 7-9] $G(s)H(s) = K(s+2)/[s(s^2+2s+a)]$의 극이동 효과를 보여주는 근궤적선도.

근궤적 작도에 있어서 중요한 점

- $G(s)H(s)$ 에 극과 영점 추가로 인한 영향



[그림 7-9] $G(s)H(s) = K(s+2)/[s(s^2+2s+a)]$의 극이동 효과를 보여주는 근궤적선도.

근콘투어 : 다중 파라미터의 변화

- 다중 파라미터 변화
  - 한 개 이상의 파라미터가 -∞ 에서 ∞ 까지 연속적으로 변화
  - 그 근궤적을 근콘투어(RC : root contours)
    - 방정식

$$P(s)+K_1Q_1(s)+K_2Q_2(s)=0 \qquad (7\text{-}50)$$

- K_1, K_2 : 가변파라미터
- $P(s), Q_1(s), Q_2(s)$: s 의 다항식

$$K_2=0$$

$$P(s)+K_1Q_1(s)=0 \qquad (7\text{-}51)$$

- 근궤적

$$1+\frac{K_1Q_1(s)}{P(s)}=0 \qquad (7\text{-}52)$$

근콘투어 : 다중 파라미터의 변화

- 다중 파라미터 변화
  - 한 개 이상의 파라미터가 -∞ 에서 ∞ 까지 연속적으로 변화
  - 그 근궤적을 근콘투어(RC : root contours)
    - 방정식

$$P(s)+K_1Q_1(s)+K_2Q_2(s)=0 \qquad \text{(7-50)}$$

- K_1, K_2 : 가변파라미터
- $P(s), Q_1(s), Q_2(s)$: s 의 다항식

K_1 : 일정

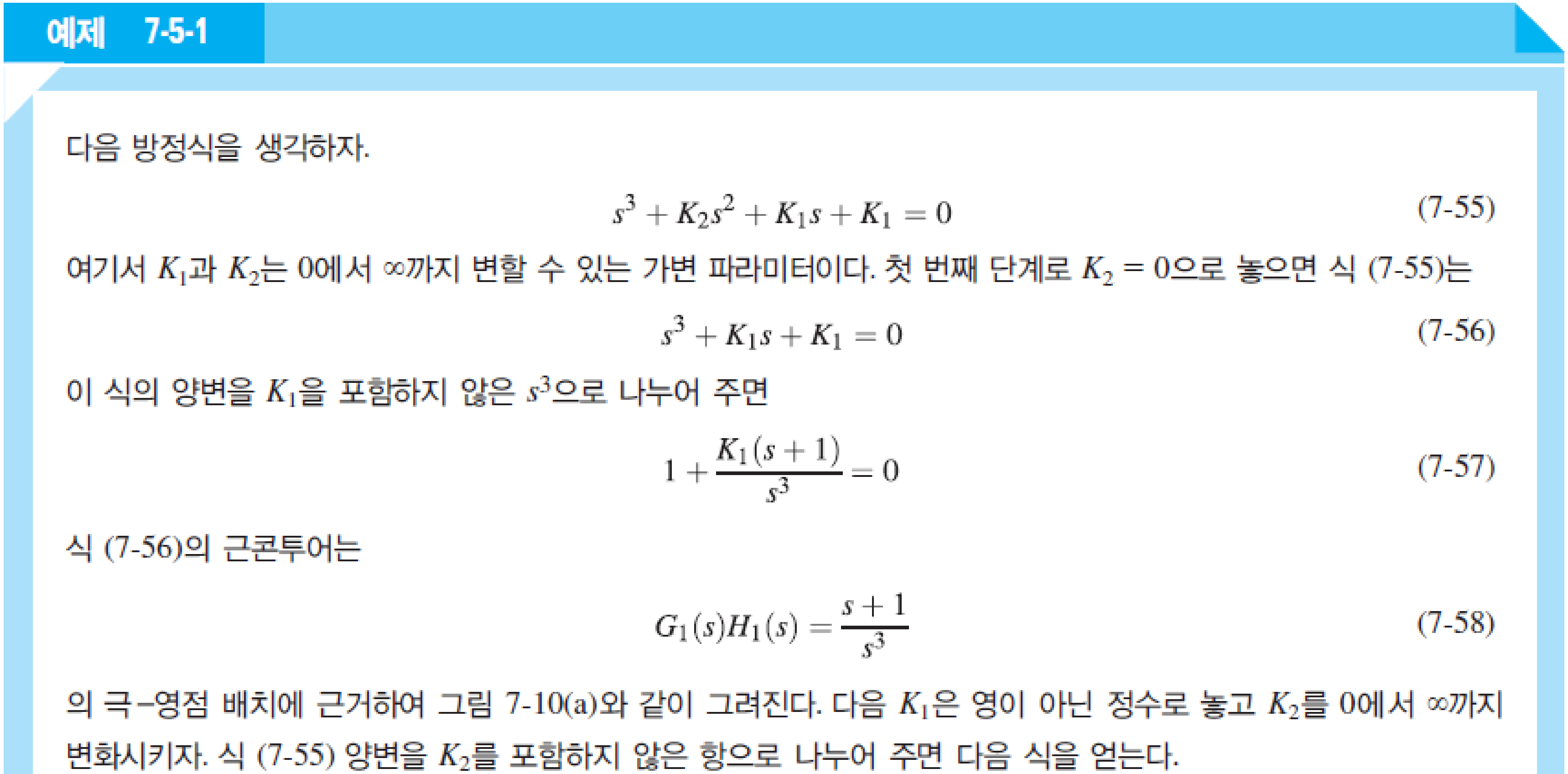
$$1+\frac{K_2Q_2(s)}{P(s)+K_1Q_1(s)}=0 \qquad \text{(7-53)}$$

- 근콘투어(K_2 가 변할 때 K_1 은 고정)

$$G_2(s)H_2(s)=\frac{Q_2(s)}{P(s)+K_1Q_1(s)} \qquad \text{(7-54)}$$

근콘투어 : 다중 파라미터의 변화

- 다중 파라미터 변화



예제 7-5-1

다음 방정식을 생각하자.

$$s^3 + K_2 s^2 + K_1 s + K_1 = 0 \tag{7-55}$$

여기서 K_1과 K_2는 0에서 ∞까지 변할 수 있는 가변 파라미터이다. 첫 번째 단계로 $K_2 = 0$으로 놓으면 식 (7-55)는

$$s^3 + K_1 s + K_1 = 0 \tag{7-56}$$

이 식의 양변을 K_1을 포함하지 않은 s^3으로 나누어 주면

$$1 + \frac{K_1(s+1)}{s^3} = 0 \tag{7-57}$$

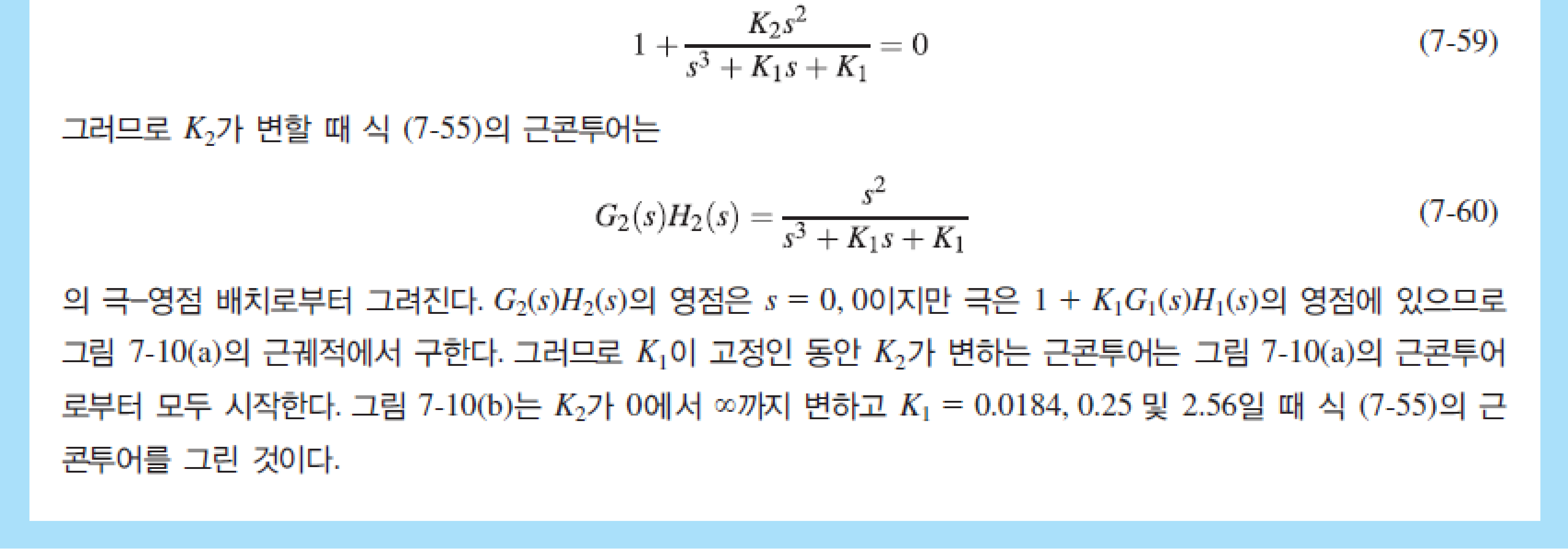
식 (7-56)의 근콘투어는

$$G_1(s)H_1(s) = \frac{s+1}{s^3} \tag{7-58}$$

의 극-영점 배치에 근거하여 그림 7-10(a)와 같이 그려진다. 다음 K_1은 영이 아닌 정수로 놓고 K_2를 0에서 ∞까지 변화시키자. 식 (7-55) 양변을 K_2를 포함하지 않은 항으로 나누어 주면 다음 식을 얻는다.

근콘투어 : 다중 파라미터의 변화

- 다중 파라미터 변화



$$1 + \frac{K_2 s^2}{s^3 + K_1 s + K_1} = 0 \tag{7-59}$$

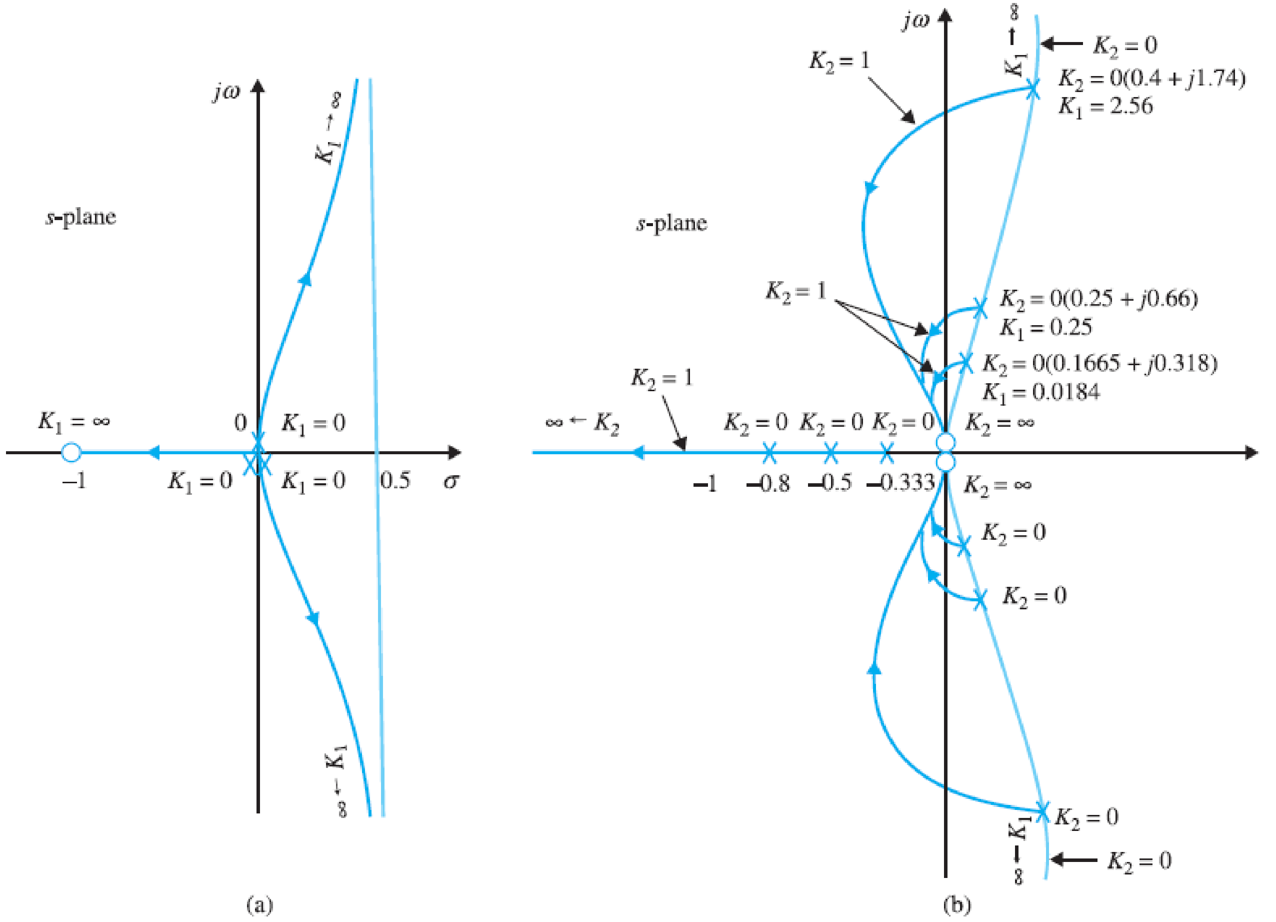
그러므로 K_2가 변할 때 식 (7-55)의 근콘투어는

$$G_2(s)H_2(s) = \frac{s^2}{s^3 + K_1 s + K_1} \tag{7-60}$$

의 극–영점 배치로부터 그려진다. $G_2(s)H_2(s)$의 영점은 $s = 0, 0$이지만 극은 $1 + K_1G_1(s)H_1(s)$의 영점에 있으므로 그림 7-10(a)의 근궤적에서 구한다. 그러므로 K_1이 고정인 동안 K_2가 변하는 근콘투어는 그림 7-10(a)의 근콘투어로부터 모두 시작한다. 그림 7-10(b)는 K_2가 0에서 ∞까지 변하고 $K_1 = 0.0184, 0.25$ 및 2.56일 때 식 (7-55)의 근콘투어를 그린 것이다.

근콘투어 : 다중 파라미터의 변화

- 다중 파라미터 변화

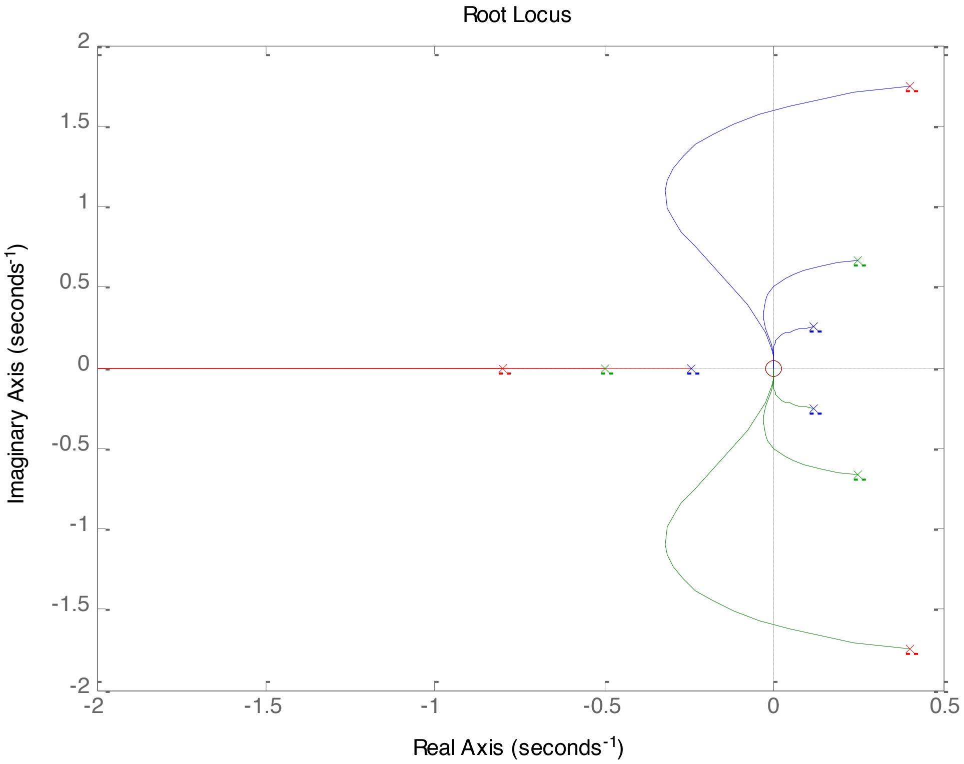


[그림 7-10] $s^2 + K_2s^2 + K_1s + K_1 = 0$의 근콘투어. (a) $K_2 = 0$. (b) K_1은 일정이고 K_2는 가변.

근콘투어 : 다중 파라미터의 변화

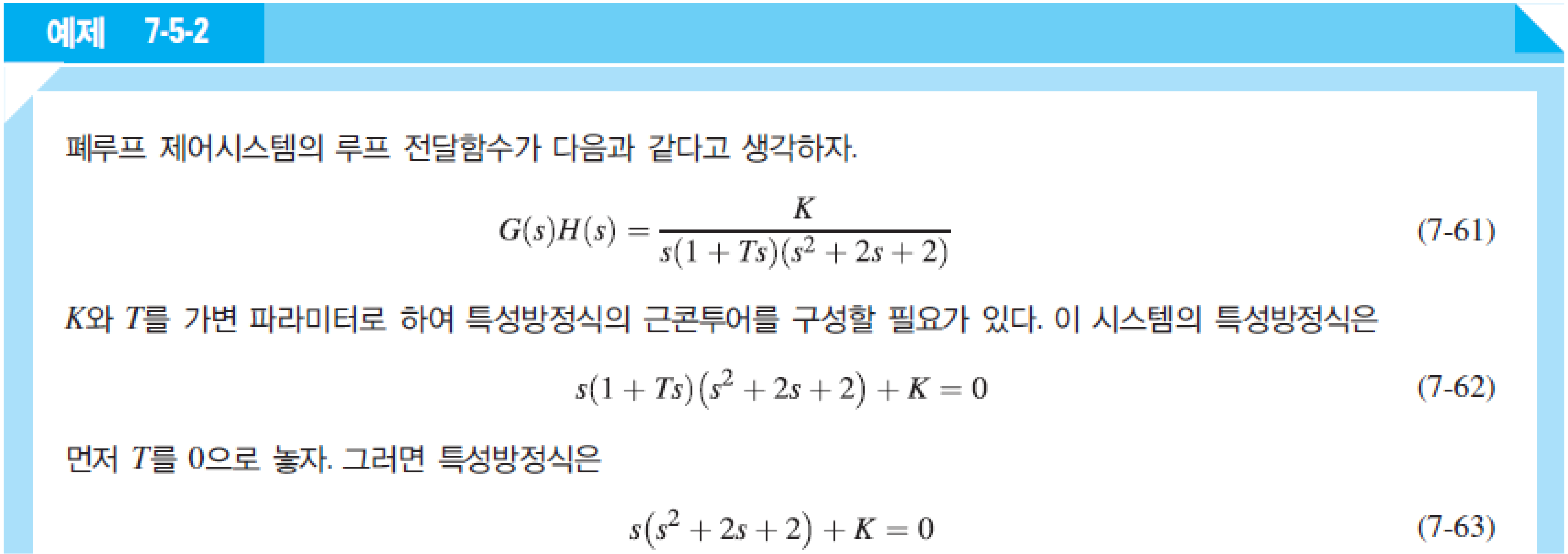
- 다중 파라미터 변화

```
%%Toolbox 7-5-1
%%식 7-10을 위한 MATLAB 명령
for k1 = [0.0184 0.25 2.56];
    num = [1 0 0];
    den = [1 0 k1 k1];
    mysys = tf(num, den);
    rlocus(mysys);
    hold on;
end;
```



근콘투어 : 다중 파라미터의 변화

- 다중 파라미터 변화



예제 7-5-2

폐루프 제어시스템의 루프 전달함수가 다음과 같다고 생각하자.

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(1+Ts)(s^2+2s+2)} \tag{7-61}$$

K와 T를 가변 파라미터로 하여 특성방정식의 근콘투어를 구성할 필요가 있다. 이 시스템의 특성방정식은

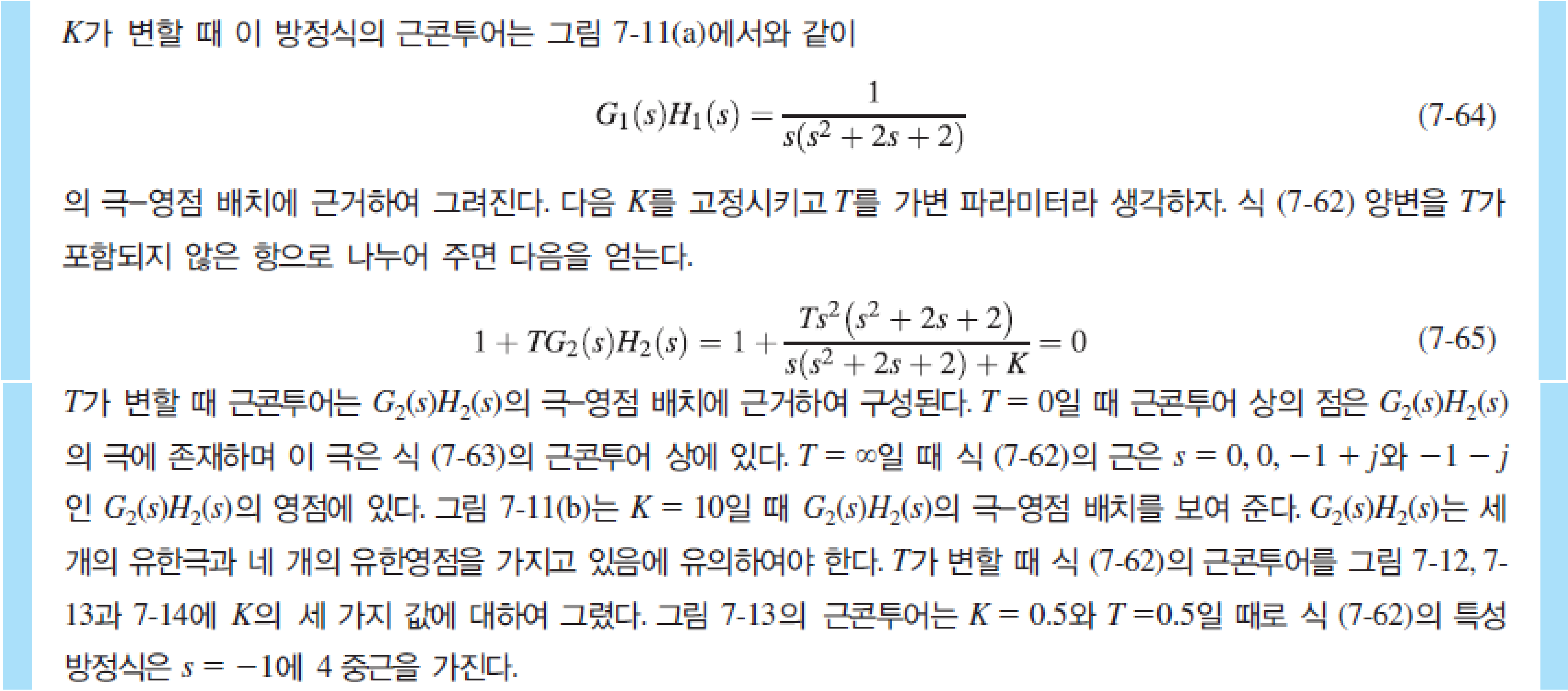
$$s(1+Ts)(s^2+2s+2)+K=0 \tag{7-62}$$

먼저 T를 0으로 놓자. 그러면 특성방정식은

$$s(s^2+2s+2)+K=0 \tag{7-63}$$

근콘투어 : 다중 파라미터의 변화

- 다중 파라미터 변화



K가 변할 때 이 방정식의 근콘투어는 그림 7-11(a)에서와 같이

$$G_1(s)H_1(s) = \frac{1}{s(s^2+2s+2)} \qquad (7\text{-}64)$$

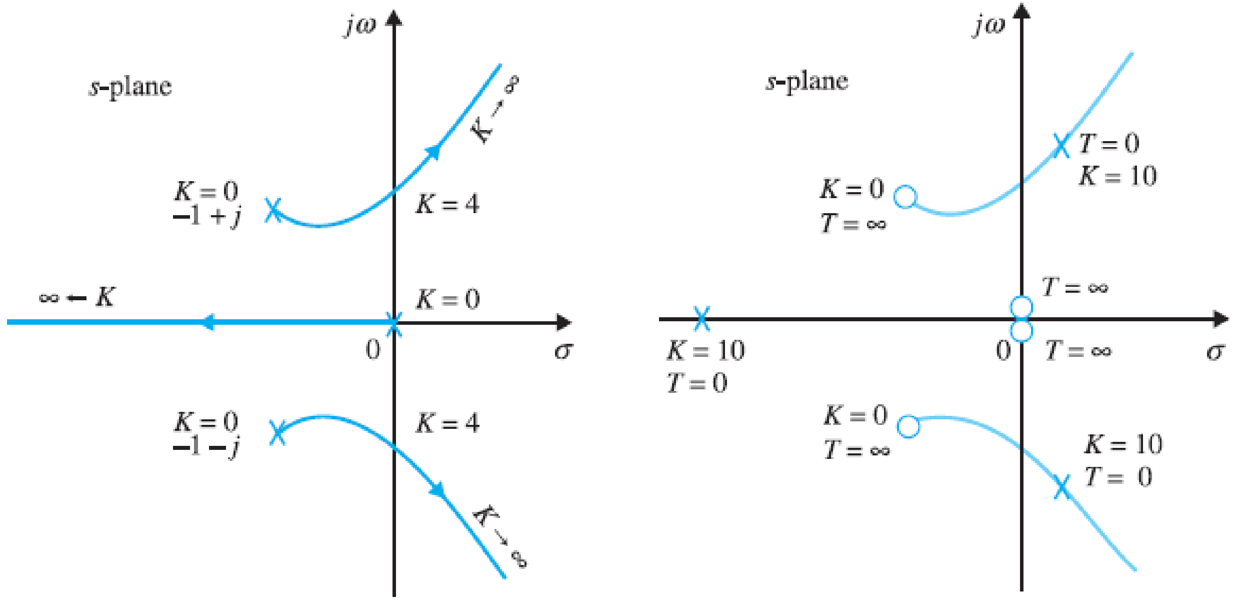
의 극–영점 배치에 근거하여 그려진다. 다음 K를 고정시키고 T를 가변 파라미터라 생각하자. 식 (7-62) 양변을 T가 포함되지 않은 항으로 나누어 주면 다음을 얻는다.

$$1 + TG_2(s)H_2(s) = 1 + \frac{Ts^2(s^2+2s+2)}{s(s^2+2s+2)+K} = 0 \qquad (7\text{-}65)$$

T가 변할 때 근콘투어는 $G_2(s)H_2(s)$의 극–영점 배치에 근거하여 구성된다. $T = 0$일 때 근콘투어 상의 점은 $G_2(s)H_2(s)$의 극에 존재하며 이 극은 식 (7-63)의 근콘투어 상에 있다. $T = \infty$일 때 식 (7-62)의 근은 $s = 0, 0, -1 + j$와 $-1 - j$인 $G_2(s)H_2(s)$의 영점에 있다. 그림 7-11(b)는 $K = 10$일 때 $G_2(s)H_2(s)$의 극–영점 배치를 보여 준다. $G_2(s)H_2(s)$는 세 개의 유한극과 네 개의 유한영점을 가지고 있음에 유의하여야 한다. T가 변할 때 식 (7-62)의 근콘투어를 그림 7-12, 7-13과 7-14에 K의 세 가지 값에 대하여 그렸다. 그림 7-13의 근콘투어는 $K = 0.5$와 $T = 0.5$일 때로 식 (7-62)의 특성방정식은 $s = -1$에 4 중근을 가진다.

근콘투어 : 다중 파라미터의 변화

- 다중 파라미터 변화

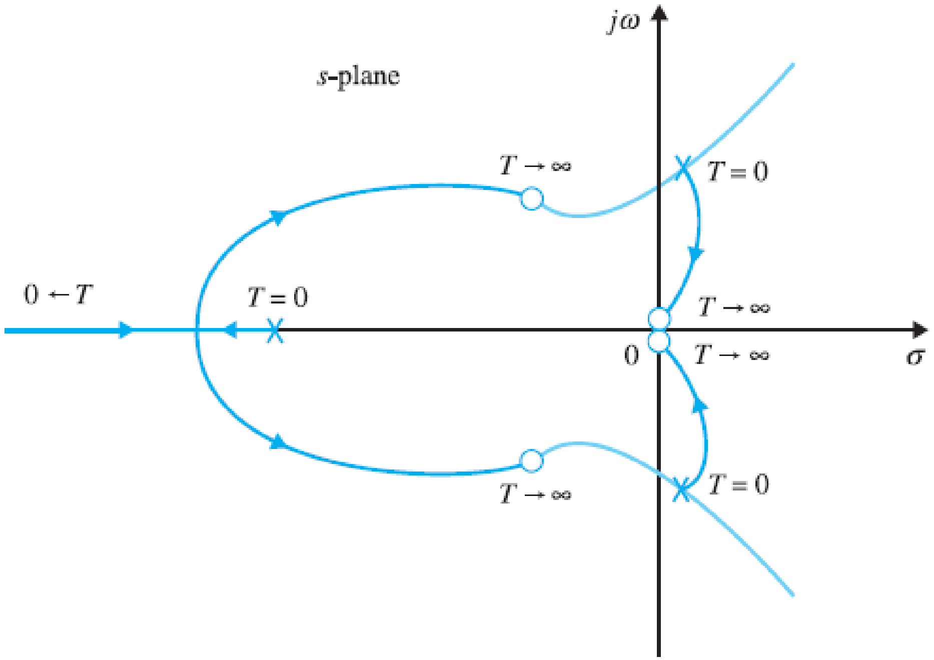


(a) (b)

[그림 7-11] (a) $s(s^2 + 2s + 2) + K = 0$의 근궤적. (b) $G_2(s)H_2(s) = Ts^2 (s^2 + 2s + 2)/[s(s^2 + 2s + 2) + K]$의 극–영점 배치.

근콘투어 : 다중 파라미터의 변화

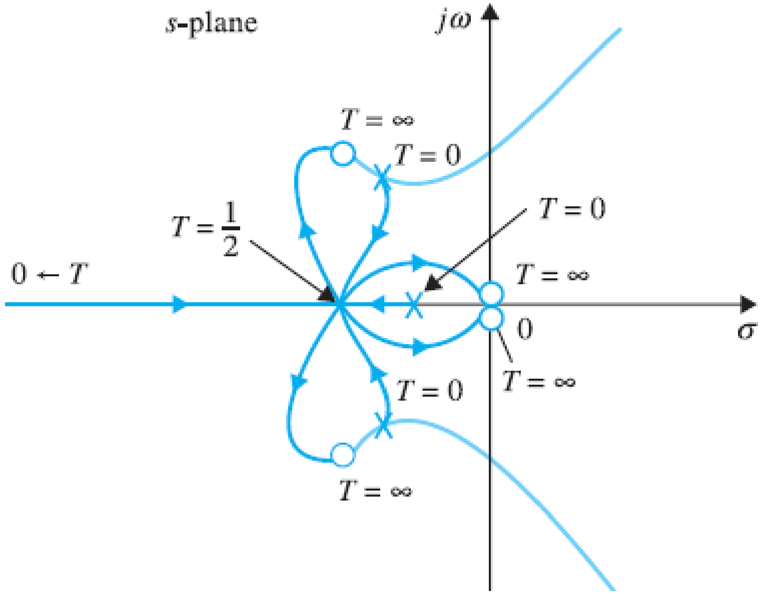
- 다중 파라미터 변화



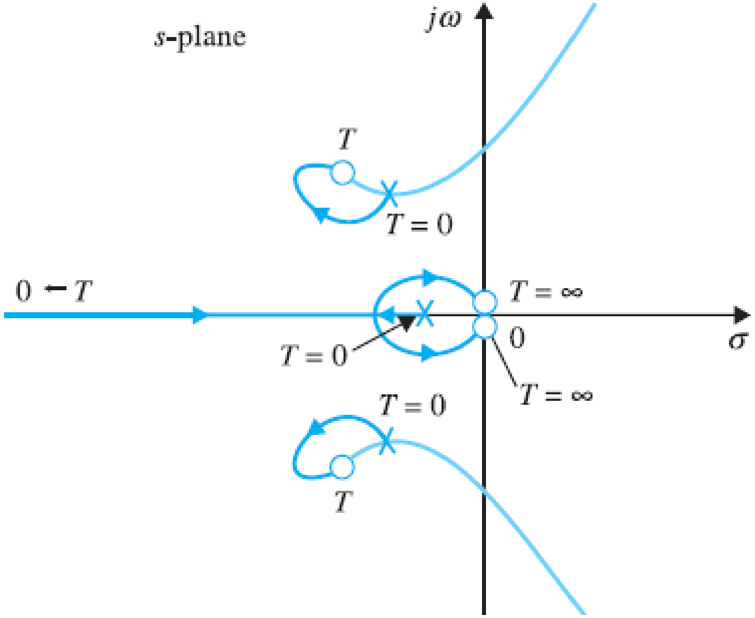
[그림 7-12] $K > 4$인 $s(1 + Ts)(s^2 + 2s + 2) + K = 0$의 근콘투어.

근콘투어 : 다중 파라미터의 변화

- 다중 파라미터 변화



[그림 7-13] $K = 0.5$인 $s(1+Ts)(s^2 + 2s + 2) + K = 0$의 근콘투어.



[그림 7-14] $K < 0.5$인 $s(1 + Ts)(s^2 + 2s + 2) + K = 0$의 근콘투어.

근콘투어 : 다중 파라미터의 변화

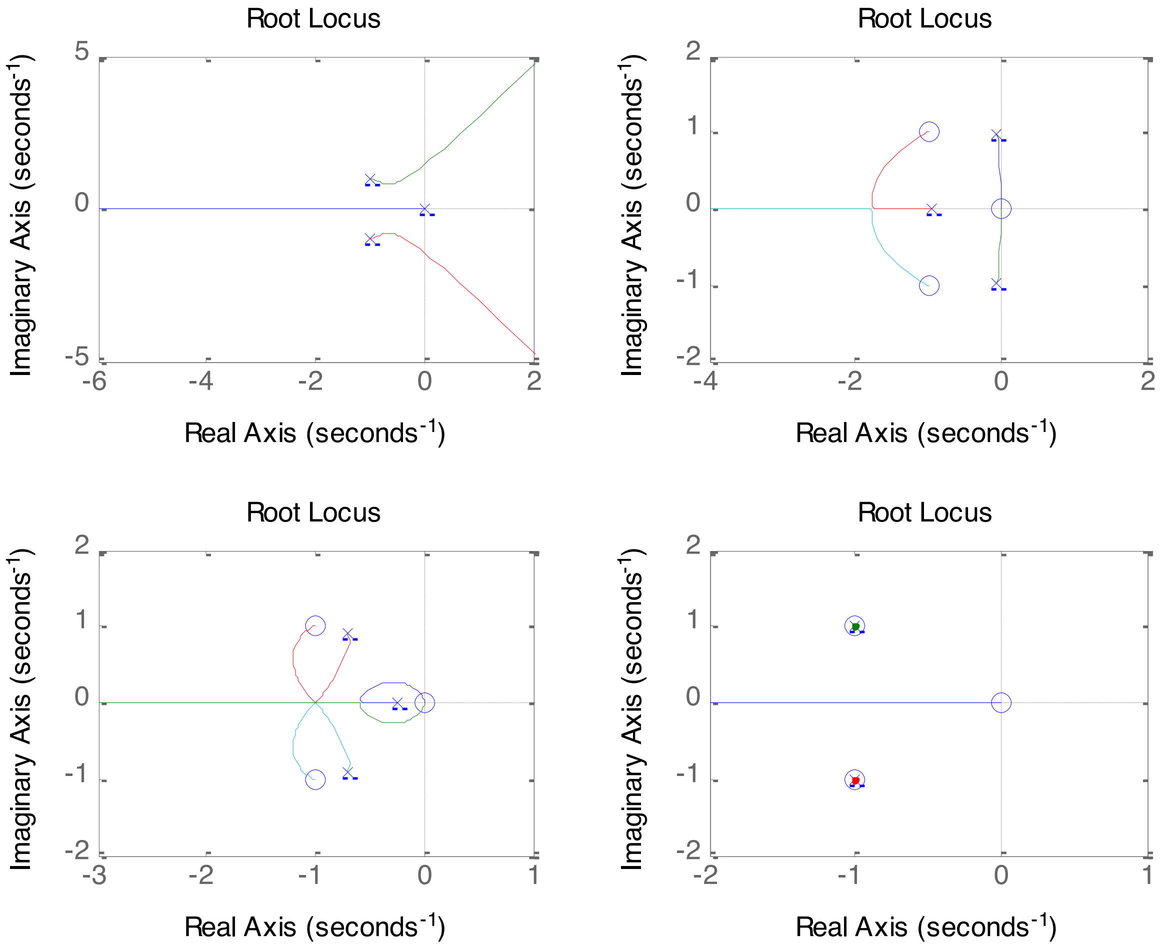
- 다중 파라미터 변화

```
%Toolbox 7-5-2
%MATLAB statements for Example 7-5-2
%T = 0
num=[1];den=conv([1 0],conv([0 1],[1 2
2]));
mysys=tf(num,den);
subplot(2,2,1);rlocus(mysys);
%k>4
for k=4:10;
    num = conv([1 0 0],[1 2 2]);
    den = conv([1 0],[1 2 2]);
    den = den+k;
    mysys = tf(num,den);
    subplot(2,2,2);rlocus(mysys);
end;
```

```
k=0.5;
num = conv([1 0 0],[1 2 2]);
den = conv([1 0],[1 2 2]);
den = den+k;
mysys = tf(num,den);
subplot(2,2,3)
rlocus(mysys);
%k<0.5
for k=-100:0.5;
    num = conv([1 0 0],[1 2 2]);
    den = conv([1 0],[1 2 2]);
    den = den+k;
    mysys = tf(num,den);
    subplot(2,2,4);rlocus(mysys);
end;
```

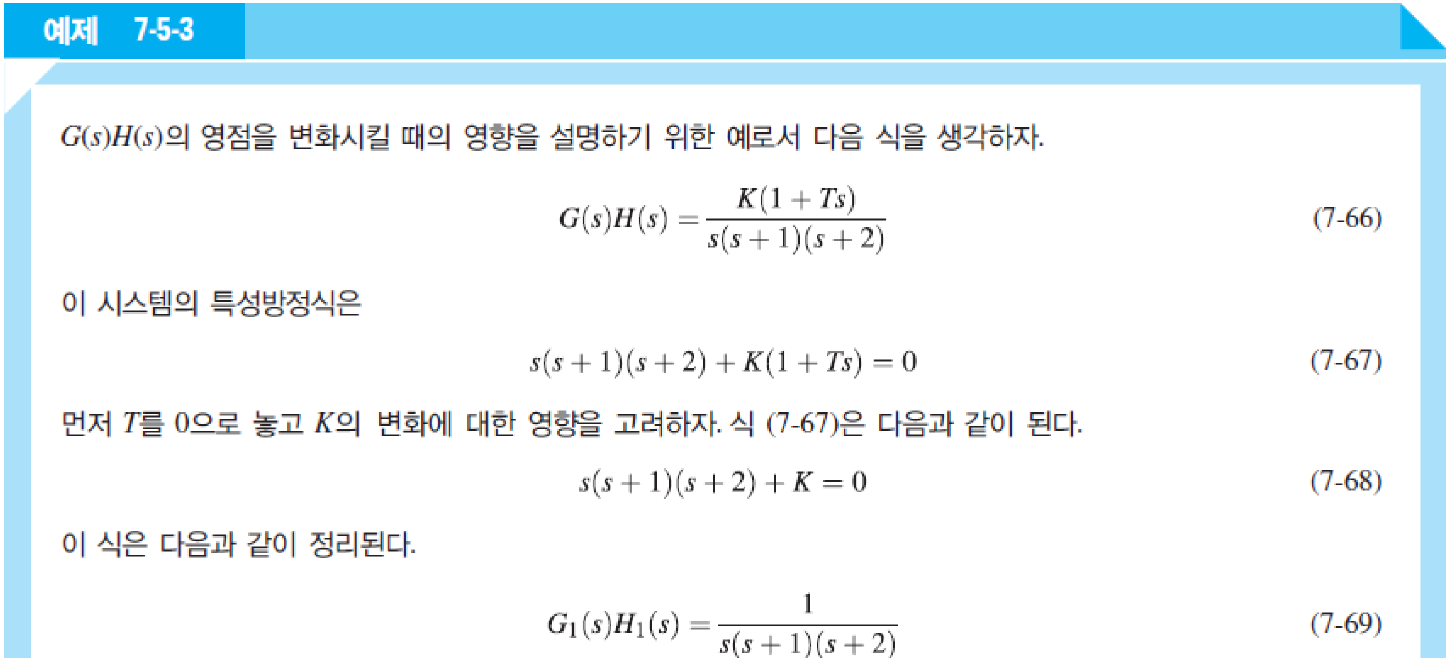
근콘투어 : 다중 파라미터의 변화

- 다중 파라미터 변화



근콘투어 : 다중 파라미터의 변화

- 다중 파라미터 변화



예제 7-5-3

$G(s)H(s)$의 영점을 변화시킬 때의 영향을 설명하기 위한 예로서 다음 식을 생각하자.

$$G(s)H(s) = \frac{K(1+Ts)}{s(s+1)(s+2)} \tag{7-66}$$

이 시스템의 특성방정식은

$$s(s+1)(s+2) + K(1+Ts) = 0 \tag{7-67}$$

먼저 T를 0으로 놓고 K의 변화에 대한 영향을 고려하자. 식 (7-67)은 다음과 같이 된다.

$$s(s+1)(s+2) + K = 0 \tag{7-68}$$

이 식은 다음과 같이 정리된다.

$$G_1(s)H_1(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)} \tag{7-69}$$

근콘투어 : 다중 파라미터의 변화

- 다중 파라미터 변화

식 (7-68)의 근콘투어는 식 (7-69)의 극−영점 배치에 근거하여 그림 7-15와 같이 그려진다.

K가 0이 아니게 고정될 때 식 (7-67) 양변을 T를 포함하지 않은 항으로 나누어 주면 다음 식을 얻는다.

$$1 + TG_2(s)H_2(s) = 1 + \frac{TKs}{s(s+1)(s+2)+K} = 0 \qquad (7\text{-}70)$$

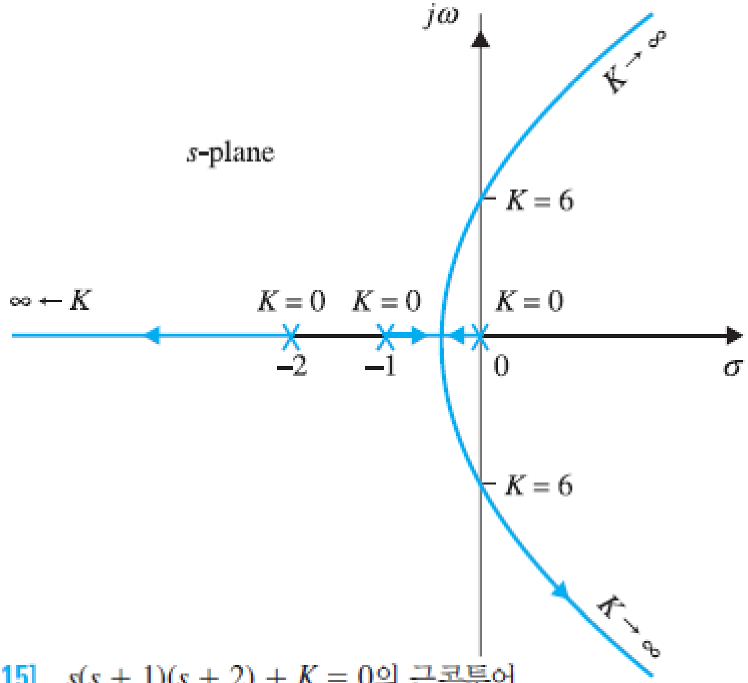
근콘투어 상 $T = 0$에 대응하는 점들은 $G_2(s)H_2(s)$의 극이거나 $s(s+1)(s+2)+K$의 영점으로 이들의 근콘투어는 K를 변화시킬 때 그림 7-15에 그린 것과 같다. 설명에서와 같이 $K = 20$으로 잡으면 $G_2(s)H_2(s)$의 극−영점 배치는 그림 7-16과 같다. $0 \le T < \infty$에서 식 (7-67)의 근콘투어를 K의 서로 다른 세 가지 값에 대하여 그림 7-17에 그렸다.

$G_2(s)H_2(s)$는 세 개의 유한극과 한 개의 영점을 가지므로 T가 변할 때 근콘투어의 점근선 각도는 90°와 −90°이다. 점근선 교차점은 항상 $s = 1.5$임을 증명할 수 있다. 왜냐하면 $G_2(s)H_2(s)$의 극의 합은 식 (7-70) 분모 다항식 중 s^2항의 계수인 3의 부호를 바꾼 것으로 $G_2(s)H_2(s)$의 영점의 합은 0으로 식 (7-30)의 $n - m$이고 2이기 때문이다.

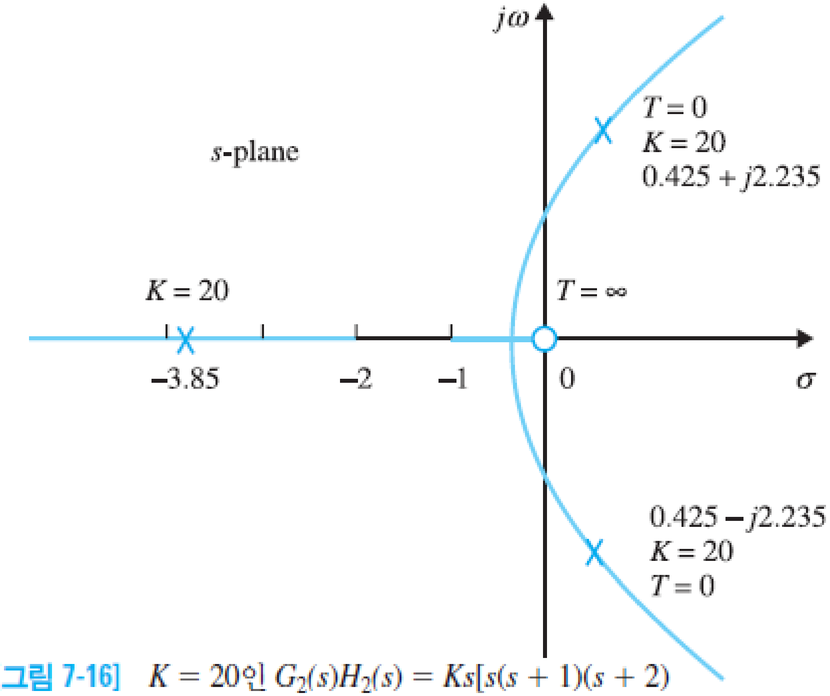
그림 7-17의 근콘투어는 루프 전달함수에 영점을 추가하면 특성 방정식 근을 s평면 왼쪽으로 이동시키므로 폐루프시스템의 상대안정도를 일반적으로 개선시키는 것을 보여 준다. 그림 7-17에서와 같이 $K = 20$에 대하여 이 시스템은 T가 0.2333보다 큰 모든 값에 대하여 안정된다. 그러나 T를 증가시켜 이 시스템이 가질 수 있는 가장 큰 감쇠비는 약 30% 정도이다.

근콘투어 : 다중 파라미터의 변화

- 다중 파라미터 변화



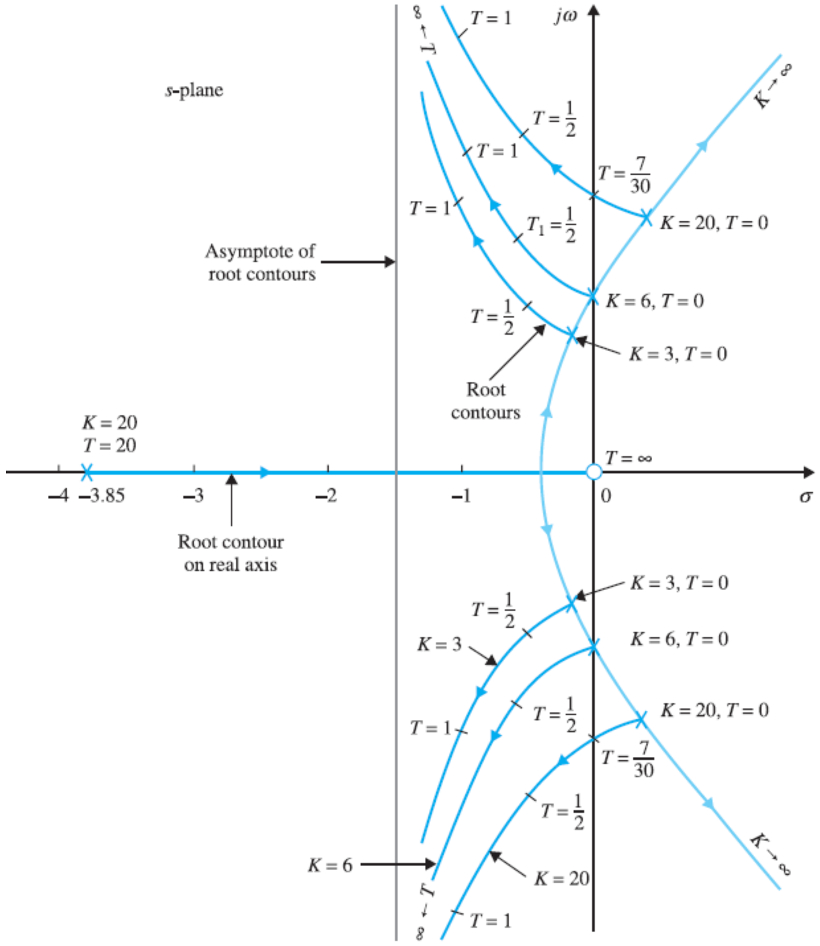
[그림 7-15] $s(s+1)(s+2)+K=0$의 근콘투어.



[그림 7-16] $K=20$인 $G_2(s)H_2(s)=Ks[s(s+1)(s+2)+K]$의 극-영점 배치.

근콘투어 : 다중 파라미터의 변화

- 다중 파라미터 변화



[그림 7-17] $s(s+1)(s+2)+K+KTs=0$의 근콘투어.

근콘투어 : 다중 파라미터의 변화

- 다중 파라미터 변화

```
%Toolbox 7-5-3
%MATLAB statements for Fig. 7-17
%Same results as Fig. 7-17 can be obtained
by using the following MATLAB statements:
for k= [3 6 20];
    num=[k 0];
    den=conv([1 0],conv([1 1],[1 2]));
    den=den+k;
    mysys=tf(num,den);
    rlocus(mysys);
    axis([-4 4 -10 10]);
hold on
end;
```